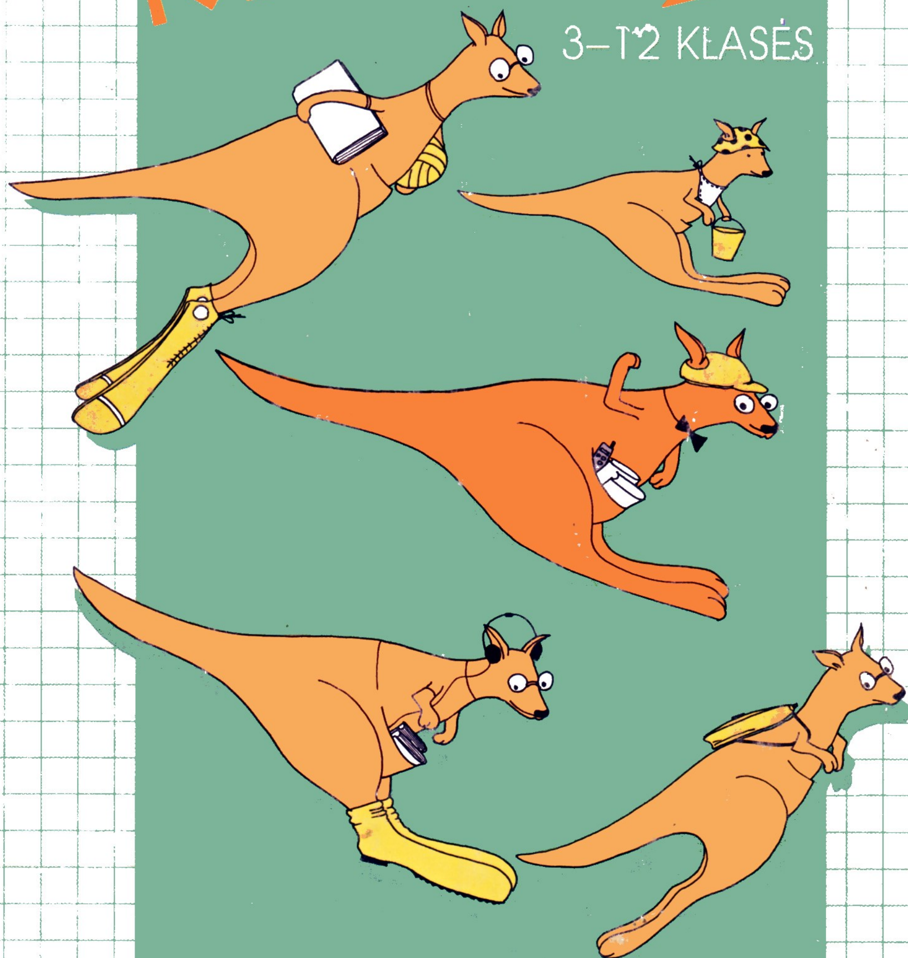
KENGŪRA 2000



TARPTAUTINIO MATEMATIKOS

KONKURSO

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

КЕНГУРУ 2000

KANGUR 2000

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZACINIS KOMITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2000

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Sudarė JUOZAS MAČYS

TEV
VILNIUS 2000

UDK 51(079)
Ke108

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota
2000 12 11 grifo Nr. 15

Darbo vadovas: *Valdas Vanagas*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*
Gamybos vadovas: *Algimantas Paškevičius*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Aldona Žalienė*
Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV *Internet'o* svetainė: www.tev.lt

ISBN 9986-546-97-4

TURINYS

Kengūra 2000. Rezultatai ir pamokos

Nėra pasaulyje populiaresnių moksleivių varžybų kaip tarptautinis „Kengūros“ konkursas. Prasidėjęs Australijoje, jis greitai išplito Europoje. 1994 metais buvo įkurta asociacija „Kengūra be sienų“ (*Kangourou sans frontières*), į kurią įstojo Ispanija, Prancūzija, Didžioji Britanija, Vengrija, Italija, Liuksemburgas, Moldavija, Olandija, Lenkija, Rusija, Slovėnija. Vėliau prie jos prisijungė Estija, Baltarusija, Makedonija, Čekija, Vokietija, Rumunija, Ukraina, Bulgarija, Slovakija, Švedija, Kroatija, Austrija, Gruzija, Islandija, Airija, Lietuva ir kitos šalys. Šiemet į asociaciją įstojo Meksika, Brazilija, taigi dabar „Kengūra“ nebėra vien Europos valstybių renginys, o jos dalyvių skaičius artėja prie 2 milijonų.

Lietuvoje „Kengūros“ konkursas atskirose mokyklose organizuojamas jau nuo 1995 metų. Iki 1998 metų užduočių sąlygos būdavo parsisiunčiamos rusų ir lenkų kalbomis, ir tik 1999 metais jos buvo parengtos lietuviškai. 1999 metų lapkričio mėnesį buvo sukurtas Lietuvos „Kengūros“ konkurso organizavimo komitetas, į kurį įėjo Švietimo ir mokslo ministerijos, Matematikos ir informatikos instituto, Vilniaus universiteto ir mokytojų atstovai.

Kad mokiniai galėtų geriau pasirengti konkursui, organizavimo komiteto bei Matematikos ir informatikos instituto rūpesčiu buvo išleista knygelė „Kengūra. Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai. 3–12 klasės“, TEV, Vilnius, 1999.

Lietuvoje (kaip ir daugelyje šalių) 2000 metų konkursas įvyko kovo 16 dieną, ketvirtadienį. Konkurse dalyvavo beveik 23000 moksleivių iš 605 Lietuvos mokyklų (dar apie 3000 lenkiškų mokyklų moksleivių sprendė Lenkijos „Kengūros“ konkurso užduotis).

Kaip konkursas buvo organizuojamas plačiai aprašyta matematikos ir informatikos žurnale „Alfa plus omega“, 2000 m. Nr. 1, kurį galima rasti visų mokyklų bibliotekose.

Geriausiai pasirodžiusių moksleivių penkiasdešimtukai yra pateikti specialioje knygelėje „Kengūra 2000 (Rezultatai)“, kurią gavo kiekviena mokykla bei visų rajonų (miestų) švietimo skyriai, ir Internete (http://www.tev.lt/kengura). Kiekviena mokykla dar gavo savo visų dalyvavusių moksleivių rezultatus, o kiekvienas rajono (miesto) švietimo skyrius — geriausių savo rajono (miesto) kiekvienos klasės dešimtukų rezultatus.

Suvedant rezultatus kilo *identiškų atsakymų* problema. Jeigu matėte geriausiųjų 50-ukų sąrašus, tikriausiai pastebėjote, kad ten *kursyvu* išskirti du tos pačios mokyklos moksleiviai, kurių atsakymų rinkiniai buvo visiškai vienodi (t. y. kompiuteris nustatė, kad sutapo *visi* — ir teisingi, ir neteisingi atsakymai). Svarstant šią problemą, konkurso organizavimo komitete išsiskyrė dvi nuomonės: a) tegul lieka sąraše, nepagautas — ne vagis; b) išmesti, nes tikimybė, kad savarankiškai sprendžiant pakankamai sudėtingus uždavinius per trumpą laiko tarpą bus padarytos visos tos pačios klaidos, nepaprastai maža net šalies mastu, o dažniausiai tokių atvejų pasitaikė toje pat mokykloje.

Galų gale buvo priimtas kompromisinis sprendimas. Kadangi „Kengūros“ konkursas yra labai demokratiškas, rajonams ir mokykloms buvo palikta teisė patiems spręsti, buvo ar nebuvo pažeistos jo sąlygos (pvz., ar buvo galimybių nusirašyti, spręsti kolektyviai, spręsti ilgiau nei 75 minutes ir pan.), ir kaip traktuoti identiškus darbus. Be to, *visiems* konkurse dalyvavusiems moksleiviams, nepriklausomai nuo rezultatų, buvo įteikti gražūs konkurso organizavimo komiteto padėkos pažymėjimai. Tačiau į sąrašus geriausiai Lietuvoje pasirodžiusių moksleivių, kurie apdovanojami diplomais ir specialiais „Kengūros“

prizais, vis dėlto nutarta netraukti trijų ir daugiau vienos klasės moksleivių, kurių rezultatai identiški. Taip pat jei kurios nors mokyklos *toje pačioje grupėje* programa surado daugiau kaip du identiškus visų uždavinių atsakymus, jų autoriai buvo iškelti į penkiasdešimtukų sąrašo galą už brūkšnio. Tuo tarpu „porelėms" nutarta išrašyti vieną diplomą ir skirti vieną prizą — tikintis, kad jie taip pat draugiškai pasidalys apdovanojimus. Be to, organizavimo komitetas dalį prizų skyrė geriausiai savo regione pasirodžiusiems rajonų ir miestų moksleiviams, nepatekusiems į 50-ukus. Tokių apdovanotųjų yra apie 1000, o jų skaičius kiekviename rajone ar mieste priklauso nuo dalyvavusių skaičiaus. Todėl Vilniaus mieste apdovanota net 212 dalyvių, o Birštono, Neringos ir Alytaus (!!) miestuose vos po du. Iš rajonų gausiausiai dalyvavo Kauno rajonas (todėl gavo 39 apdovanojimus), o kukliausiai — Varėnos (tik 2 apdovanojimai). Beje, tarp mokyklų absoliutūs lyderiai yra Vilniaus Žirmūnų (261 dalyvis), Vilniaus „Gabijos" (232) ir Klaipėdos „Ąžuolyno" gimnazijos (215), o iš rajonų aktyviausi buvo Jonavos J. Ralio vidurinės mokyklos moksleiviai (net 189 dalyviai — ketvirtas rezultatas visoje Lietuvoje).

25 geriausieji „mažyliai" ir „bičiuliai" buvo pakviesti dalyvauti Šiaulių universiteto organizuotoje Lietuvos IV ir V klasių olimpiadoje. Šeši geriausiai konkurse pasirodę „kadetai" kartu su dar šešiais lenkų mokyklų moksleiviais vyko į tarptautinę „kengūrininkų" vasaros stovyklą Zakopanėje (Lenkija). Vyresniųjų klasių nugalėtojai dalyvavo matematikos stovykloje Vilniuje, kur turėjo progos pabendrauti su savo bendraamžiais — Lietuvos matematikos olimpiados nugalėtojais.

O visi kiti sėkmingiausiai pasirodę dalyviai išsidalijo gausybę prizų - enciklopedijų, matematikos knygų, suvenyrinių marškinėlių, kepuraičių ir specialių „Kengūros" puodelių.

Tuo tarpu „Kengūra" jau ruošiasi naujiems turnyrams. Kartą metuose „Kengūros" asociacijos šalių atstovai susirenka į suvažiavimą. Šiemet toks suvažiavimas įvyko Čekijoje, Čelakovicėje (miestelyje netoli Prahos), spalio mėnesio 20–22 dienomis. Jame buvo apsvarstytos užduotys, siūlomos 2001 metų konkursui. Prieš suvažiavimą labai didelį darbą atliko Uždavinių komitetas, kuris iš 400–500 uždavinių, atsiųstų iš įvairių šalių, atrinko po 50–60 uždavinių kiekvienai iš 5 konkurso grupių. Tokį rinkinį gavo kiekviena šalis. Beje, vieni uždaviniai jame buvo pateikiami anglų, kiti - prancūzų kalba, todėl suvažiavimo dalyviai turėjo gaudytis abiejose kalbose. Iš viso sąrašo balsuojant buvo sudaryti rekomenduojami užduočių variantai (kaip įprasta „Mažylio" grupei - 24 uždaviniai, kitoms grupėms - po 30 uždavinių). Po to tie variantai buvo tikslinami, redaguojami, tad išvažiuodama kiekviena šalis turėjo angliškai parengtą užduočių rinkinį (deja, be sprendimų).

Nutarta, kad 2001 metais „Kengūros" konkursas vyks kovo 15 dieną (ketvirtadienį). Tad linkime visiems gerai išsinagrinėti pateiktus 2000 m. konkurso užduočių sprendimus ir parodyti savo tikrąsias galimybes per 2001 m. varžybas.

Visais iškilusiais klausimais prašom kreiptis į organizavimo komitetą - tel.: (8-22) 729218, el. paštas: conf@ktl.mii.lt, adresas: Matematikos ir informatikos institutas, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius.

„Kengūros" konkurso organizavimo komitetas

Pratarmė

Knygelėje pateiktos 2000 m. „Kengūros“ konkurso užduotys ir jų sprendimai. Kad mokinys galėtų pasitreniruoti ir pasitikrinti, knygelės gale yra duota visų užduočių teisingų atsakymų lentelė. Mokinys galėtų daryti taip: pasiimti iš pradžių, pavyzdžiui, žemesnės klasės testą ir atlikti jį su laikrodžiu per duodamas 75 minutes. Po to jis gali pasitikrinti atsakymus ir spręsti apie savo darbo kokybę. Lygiai tą patį jis gali atlikti su savo ar vyresnės klasės testu – dauguma vyresniųjų klasių užduočių taip pat prieinamos jaunesniems.

Konkurso metu negalima naudotis skaičiuokliais. Labai įdomi konkurso savybė, kad tai testinis konkursas. Tai reiškia, kad tik vienas atsakymas iš 5 pateiktų yra teisingas, ir jūs turite tą atsakymą nustatyti. Gautą atsakymą dalyvis nurodo savo kortelėje (dalyvio kortelės pavyzdys įdėtas 8–9 psl.; ten paaiškinta ir kaip ją reikia užpildyti). Jeigu jūs beveik neabejojate atsakymu, tai geriausia pasirašyti sau tą atsakymą, pasižymėti jį, sakykime, klaustuku, ir grįžti prie jo tik tada, jei liktų laiko (beje, jo greičiausiai neliks). Todėl konkursui ir reikia ruoštis specialiai, ne kaip egzaminui ar olimpiadai: čia įrodinėti nieko nereikia. Dėl šios priežasties konkursas yra labai demokratiškas – sakysime, labai geras, bet lėtas olimpiadininkas gali parodyti blogesnį rezultatą negu pritingintis, bet greitos orientacijos mokinys.

Vertinant už teisingą atsakymą duodamas 1 taškas, už nenurodytą atsakymą — 0 taškų, už neteisingą atsakymą atimama 25% prieš uždavinį nurodyto taškų skaičiaus. Kad nebūtų neigiamų rezultatų, kiekvienam dalyviui iš karto skiriama 30 taškų („mažyliams“ — 24 taškai). Vadinasi, teoriškai dalyvis gali gauti nuo 0 iki 150 taškų („mažyliai“ — nuo 0 iki 144 taškų).

Knygelėje pateikti visų uždavinių detalūs sprendimai. Todėl pasitreniravus galima juos tiesiog skaityti. Sprendimų dalyje po uždavinio numerio nurodyta, kuris atsakymas teisingas.

? Po to ženklu ? pažymėtas spėjimas. Žinoma, kartais tas spėjimas yra beveik sprendimas, tik spėjime visą laiką remiamasi tuo, kad teisingas yra vienintelis iš penkių siūlomų pasirinkti atsakymų. Todėl atspėjus atsakymą ir pasitikrinus, kad jis tinka, nieko daugiau daryti nebereikia. Kai spėti atsakymą beprasmiška, spėjimas iš viso neduodamas ir iš karto pereinama prie sprendimo. Dar kartą pabrėžiame – rengiantis „Kengūros“ konkursui visiškai pakanka pabandyti savarankiškai paspręsti uždavinius ir paskaityti klaustuko ženklu pažymėtus „spėjimus“.

?? Ženklu ?? pažymėti kiti spėjimo būdai (pasitaiko net ir ženklas ???).

! Ženklu ! žymimas griežtas sprendimas. Suprantama, jį perskaityti labai naudinga: čia įrodoma, kad kiti atsakymai netinka, mokoma logiškai samprotauti. Tai visada pravers laikant egzaminus ar dalyvaujant olimpiadose. Beje, būtent „Kengūros“ konkursui sugalvojama daugybė naujų gražių uždavinių. Po to tuos uždavinius galima atpažinti visur – olimpiadose, valstybinių egzaminų užduotyse ir vadovėliuose.

!! Ženklu !! žymimas kitas sprendimas, dažniausiai trumpesnis, bet reikalaujantis daugiau žinių (kartais pateikiamas net trečias sprendimas, pažymėtas ženklu !!!).

KODAS

Tarptautinis matematikos konkursas
K E N G Ū R A

Mokykla

Klasė 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Grupė
Mažylis M
Bičiulis B
Kadetas K
Junioras J
Senjoras S

PAVARDĖ VARDAS

A Ą B C Č D E Ę Ė F G H I Į Y J K L M N O P R S Š T U Ų Ū V Z Ž .

ATSAKYMAI

1 A B C D E	11 A B C D E	21 A B C D E
2 A B C D E	12 A B C D E	22 A B C D E
3 A B C D E	13 A B C D E	23 A B C D E
4 A B C D E	14 A B C D E	24 A B C D E
5 A B C D E	15 A B C D E	25 A B C D E
6 A B C D E	16 A B C D E	26 A B C D E
7 A B C D E	17 A B C D E	27 A B C D E
8 A B C D E	18 A B C D E	28 A B C D E
9 A B C D E	19 A B C D E	29 A B C D E
10 A B C D E	20 A B C D E	30 A B C D E

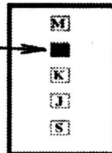
KENGŪRA 2000

Dalyvio kortelės pildymo instrukcija

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. **Kortelę reikia pildyti tik minkštu arba vidutinio kietumo juodu pieštuku (B arba HB).**
2. **Žymėdami raidę ar skaičių, turite visiškai užtušuoti atitinkamą langelį.**

GERAI užtušuoto langelio pavyzdys



Taip žymėti NEGALIMA



3. **Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.**
4. **Įrašykite savo mokyklos pavadinimą nurodytoje vietoje.**
5. **Pažymėkite, kurioje klasėje mokotės, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį eilutėje „Klasė“.**
6. **Pažymėkite, kurioje grupėje Jūs dalyvaujate, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį stulpelyje „Grupė“.**
7. **Užrašykite raidėmis ir atitinkamai pažymėkite savo pavardę ir vardą. Įrašę vardo ar pavardės raidę į langelį užtušuokite atitinkamą langelį tame pačiame stulpelyje. Viename stulpelyje gali būti pažymėta tik viena raidė. Tarp pavardės ir vardo palikite tuščią langelį ir tame stulpelyje nieko nežymėkite. Jei Jūsų vardas netelpa eilutėje, tai jį sutrumpinkite – į paskutinį langelį įrašykite tašką ir jį pažymėkite.**
8. **Išsprendę testo uždavinį, pažymėkite pasirinktą atsakymą dalyvio kortelėje – užtušuokite atitinkamą langelį uždavinio numerį atitinkančioje atsakymų eilutėje.**
9. **ŠIOS DALYVIO KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI AR GLAMŽYTI.**

Atlikę užduotį, konkurso organizaciniam komitetui grąžinkite tik šią kortelę. Užduočių lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Kaip daug gali skirtis uždavinio atsakymo spėjimas (pakankamas dalyvaujant konkurse) ir to uždavinio sprendimas, labai gerai matyti iš uždavinio J11 (žr. jo sprendimą 70 psl.). Atspėti uždavinio atsakymą čia ypač paprasta, o griežtai išspręsti uždavinį tikrai labai sunku.

Stengiantis padėti pasirengti konkursui rusų ir lenkų mokyklų moksleiviams, į knygelę įdėtos Lenkijos (lenkų kalba) ir Rusijos (rusų kalba) 2000 m. užduotys ir jų atsakymai. Tai ypač patogu žemesniųjų klasių moksleiviams, kuriems skaityti matematinį tekstą lietuviškai sunkoka. Ta proga galima prisiminti, kad Pasaulio matematikos olimpiadoje IMO visi moksleiviai gauna sąlygas ir rašo sprendimus gimtąja kalba. Beje, rusiškos ir lenkiškos užduotys gerokai skiriasi nuo lietuviškų, ir lietuvių skaitytojas ras čia naujų uždavinių, taip pat galės palyginti, kaip iš esmės tą patį uždavinį sugebama pateikti naujaip.

Pasirengti konkursui taip pat padės ir pereitais metais išleista jau minėta analogiška knygelė „Kengūra“, kurioje buvo pateiktos 1999 metų konkurso užduotys ir sprendimai. Beje, kai kurie knygelės skaitytojai sugebėjo įveikti ją visą ir nurodė aptiktus netikslumus (čia visų pirma dėkojame 2000 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados nugalėtojams Jonui Kubiliui (Vilniaus TGTM licėjus) ir Gediminui Lukšiui (Kauno TU gimnazija) bei jų mokytojams). Štai minėtos knygelės 48 psl. B29 uždavinio sprendime neįskaityti 2 kvadratėliai, kurių kraštinė lygi 2, taigi teisingas atsakymas ne C (45 kvadratai), o B (47 kvadratai). Knygelės 63 psl. J5 uždavinio sprendime vietoj spindulio paimtas skersmuo, todėl teisingas atsakymas ne E (plotas 24π), o B (plotas 6π).

Sėkmės rengiantis konkursui!

Sudarytojas

2000 m. konkurso užduočių sąlygos

MAŽYLIS (III ir IV klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

M1. Torto žvakutė sudega per 15 minučių. Per kiek laiko sudegs dešimt tokių žvakučių, jei jos visos uždegamos vienu metu?
A 1,5 minutės **B** 15 minučių **C** 150 minučių
D 1,5 valandos **E** 15 valandų

M2. Daktaras Aiskauda davė Barmalėjui 3 tabletes ir liepė jam kas 20 minučių nuryti po vieną tabletę. Po kiek minučių Barmalėjus nuris paskutinę tabletę?
A 20 **B** 30 **C** 40 **D** 50 **E** 60

M3. Kurio iš nurodytų skaičių skaitmenų sandauga yra didesnė už skaitmenų sumą?
A 112 **B** 209 **C** 312 **D** 222 **E** 211

M4. Kūlverstukas gyvena antrame aukšte. Krokodilas Gena gyvena toje pačioje laiptinėje, bet grįžtant į namus jam tenka įveikti dvigubai daugiau laiptelių negu Kūlverstukui. Kelintame aukšte gyvena Krokodilas Gena?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

M5. 4 šokoladukai ir 3 saldainiukai kartu kainuoja 61 kroną. Vienas šokoladukas kainuoja 7 kronas. Kiek kronų kainuoja vienas saldainiukas?
A 10 **B** 11 **C** 12 **D** 13 **E** 15

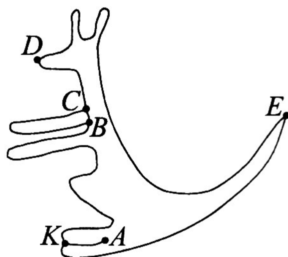
M6. Užtenka vieno 55 vietų autobuso pervežti 40 žmonių. Užtenka dviejų 55 vietų autobusų pervežti 80 žmonių. Kelių 55 vietų autobusų reikia pervežti 160 žmonių?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

M7. Trys vienodi lošimo kauliukai padėti kaip parodyta piešinyje. Yra žinoma, kad kiekvienose dviejose susiglaudusiose sienose yra po vienodai akučių. Kiek akučių yra apatinėje sienoje?



A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 5 **E** 6

M8. Petriukas nori nupiešti kengūrą „vienu brėžimu“, t. y. neatitraukdamas pieštuko nuo popieriaus ir nebrėždamas tos pačios linijos dukart. Nuo kurio taško jis gali pradėti?



A *A* **B** *B* **C** *D* **D** *K*
E Tokio taško nėra

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

M9. Per tą laiką, kol Agnė suvalgo dvi ledų porcijas, Giedrė suvalgo tris porcijas. Valgydamos kartu mergaitės per valandą suvalgė 10 porcijų ledų. Kiek porcijų per tą valandą suvalgė Agnė?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

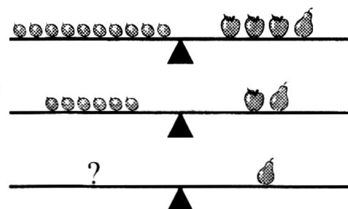
M10. Kuriuos keturis skaitmenis reikia išbraukti skaičiuje 4921508, kad susidarytų mažiausias tokiu būdu gaunamas triženklis skaičius?
A 4, 9, 2, 1 **B** 4, 2, 1, 0 **C** 1, 5, 0, 8 **D** 4, 9, 2, 5 **E** 4, 9, 5, 8

M11. Dviejose pintinėlėse buvo po 12 obuolių. Daiva pasiėmė keletą obuolių iš pirmos pintinėlės. Tada Rasa iš antros pintinėlės paėmė tiek obuolių, kiek jų buvo likę pirmoje pintinėlėje. Kiek obuolių liko abiejose pintinėlėse kartu?
A 6 **B** 12 **C** 18 **D** 20 **E** 24

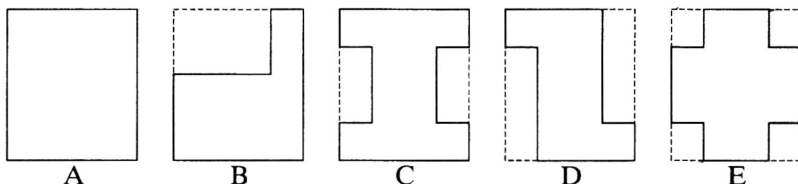
M12. Kai mokiniai ėjo iš mokyklos į muziejų, mokytoja juos surikiavo į gretas po 3 mokinius. Jūratė, Onutė ir Danutė pastebėjo, kad jos atsidūrė 7-oje gretoje nuo priekio ir 5-oje gretoje nuo galo. Kiek mokinių ėjo į muziejų?
A 12 **B** 24 **C** 30 **D** 33 **E** 36

M13. Cirko numeryje dalyvauja 14 kačių. Keletas iš jų yra katės-mamos, o kitos yra jų kačiukai. Kiekviena katė dalyvauja numeryje bent su dviem savo kačiukais. Koks yra didžiausias numeryje dalyvaujančių kačių-mamų skaičius?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

M14. Ant svarstyklių matote slyvas, obuolius ir kriaušes. Kiek slyvų atsveria vieną kriaušę?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

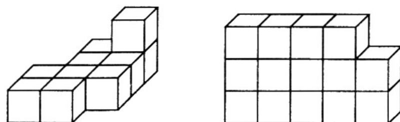


M15. Penki kaimynai A, B, C, D ir E turi vienodus stačiakampius sklypus. Kiekvienas kaimynas savo sklype tvora aptvėrė daržą:



Kurio iš kaimynų tvora ilgiausia?
A A **B** B **C** C **D** D **E** E

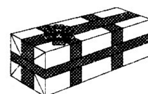
M16. Petriukas gavo dovanų dėžę vienodų medinių kubinių kaladėlių. Iš visų kaladėlių jis sudėjo du „stătinius“ (žr. brėžinį).
Visi kubeliai kartu sveria 9000 gramų, kairysis statinys sveria 3000 gramų. Kelių dešiniojo statinio kubelių nematome?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8



KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

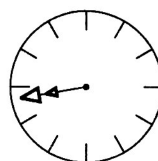
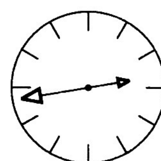
M17. Šešios vištos per 3 dienas padeda 8 kiaušinius. Kiek kiaušinių padės 3 vištos per 9 dienas?
A 10 **B** 12 **C** 14 **D** 16 **E** 9

M18. Dovanų dėžė 10 cm × 10 cm × 30 cm perrišta juosta (žr. piešinį). Koks juostos ilgis? (Į mazgams sunaudotą juostą neatsižvelkite.)
A 2 m **B** 2 m 40 cm **C** 2 m 60 cm **D** 3 m **E** 2 m 50 cm



M19. Pėsčiomis apeiti kvadratinę aikštę reikia 12 minučių. Kiek minučių reikės apeiti kvadratinę aikštę, kurios plotas keturis kartus didesnis?
A 48 **B** 24 **C** 30 **D** 20 **E** 36

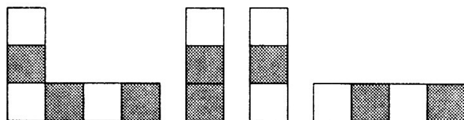
M20. Sigutė išėjo iš namų tarp 8:00 ir 9:00 ryto. Ji pastebėjo, kad tuo metu jos laikrodžio rodyklės tiksliai sutapo. Grįžusi namo tarp 2:00 ir 3:00 po vidurdienio ji pamatė, kad jos laikrodžio rodyklės yra vienoje tiesėje ir rodo į priešingas puses (žr. brėžinį). Kiek laiko Sigutės nebuvo namuose?

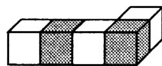
A Penkias valandas **B** Penkias su puse valandos **C** Šešias valandas
D Šešias su puse valandos **E** Septynias valandas

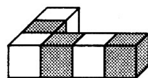
M21. Sudėję skaičių ir jo pusę gauname trimis mažiau už dvigubą tą skaičių. Tas skaičius yra:
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 10

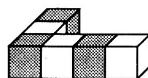
M22. Visuose keturiuose paveikslėliuose jūs iš įvairių pusių matote tą pačią konstrukciją, kuri yra sudaryta iš juodų ir baltų kubelių.

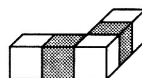


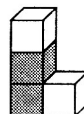
Kuri tai iš žemiau pavaizduotų penkių konstrukcijų?


A

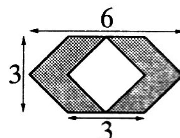

B


C

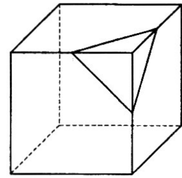

D


E

M23. Koks yra užtušuotos dalies plotas?
A 5 **B** 9 **C** 12 **D** 15 **E** 18

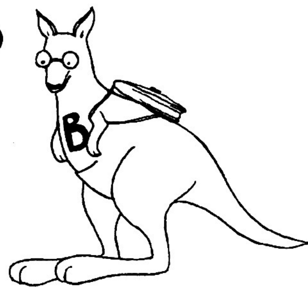


M24. Medinio kubo briauna yra 20 cm. Kiekviena viršūnė nupjaunama per išeinančių iš tos viršūnės trijų briaunų taškus, nutolusius nuo viršūnės 10 cm (žr. brėžinį; jame pavaizduota, kaip nupjaunama viena iš viršūnių). Kiek viršūnių turės naujasis kūnas?



A 6 **B** 8 **C** 12 **D** 18 **E** 24

BIČIULIS (V ir VI klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

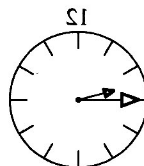
B1. Klasėje 29 mokiniai, mergaičių trimis daugiau negu berniukų. Kiek klasėje mergaičių?
A 6 **B** 13 **C** 16 **D** 19 **E** 29

B2. Nukirpome kvadrato mažą kampuką ir jį išmetėme. Kiek liko kampų?
A 0 **B** 1 **C** 3 **D** 4 **E** 5

B3. Milžino striukėje yra 585 kišenės, kiekvienoje kišenėje gyvena 3 pelės, kiekvieną pelę supa 5 jos peliukai. Kiek peliukų gyvena milžino striukėje?
A $(585 : 3) : 5$ **B** $(585 \cdot 3) : 5$ **C** $(585 \cdot 5) : 3$ **D** $585 \cdot 3 \cdot 5$ **E** $585 \cdot (5 + 3)$

B4. Penkių iš eilės einančių skaičių suma lygi 2000. Didžiausias iš tų skaičių yra:
A 490 **B** 475 **C** 471 **D** 423 **E** 402

B5. Vienas litras limonado turi 80% vandens. Kiek procentų vandens turės likęs limonadas, kai bus išgerta pusė litro?
A 30 **B** 40 **C** 100 **D** 80 **E** 10



B6. Veidrodyje matome laikrodį. Kokį laiką jis rodo?
A 15:15 **B** 10:15 **C** 10:45 **D** 8:45 **E** 9:45

B7. Skaičius 2000 gautas dauginant vien dvejetus ir penketus.
Kiek dvejetų ir kiek penketų prireikė?
A 2 dvejetų ir 5 penketų **B** 3 dvejetų ir 3 penketų **C** 3 dvejetų ir 4 penketų
D 4 dvejetų ir 3 penketų **E** 4 dvejetų ir 4 penketų

B8. Dovanų dėžė 10 cm × 10 cm × 30 cm perrišta juosta (žr. piešinį). Koks juostos ilgis? (Į mazgams sunaudotą juostą neatsižvelkite.)
A 2 m **B** 2 m 40 cm **C** 2 m 60 cm **D** 3 m **E** 2 m 50 cm



B9. Karolis skolina dviratį savo draugams taip: už 2 šokoladukus – 4 valandoms, o už 12 ledinukų – 3 valandoms. Mikas davė Karoliui 1 šokoladuką ir 4 ledinukus. Kiek laiko jis gali važinėtis Karolio dviračiu?
A Pusę valandos **B** 1 valandą **C** 2 valandas **D** 3 valandas **E** 4 valandas

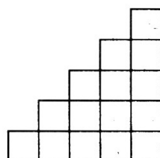
B10. Kuriuos keturis skaitmenis reikia išbraukti skaičiuje 4921508, kad susidarytų mažiausias tokiu būdu gaunamas triženklis skaičius?
A 4, 9, 2, 1 **B** 4, 2, 1, 0 **C** 1, 5, 0, 8 **D** 4, 9, 2, 5 **E** 4, 9, 5, 8

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

B11. Kiek dviženklių skaičių dalijasi ir iš 2, ir iš 7?
A 8 **B** 7 **C** 6 **D** 5 **E** 4

B12. Jeigu $A - 1 = B + 2 = C - 3 = D + 4 = E - 5$, tai didžiausias iš skaičių A, B, C, D, E yra:
A A **B** B **C** C **D** D **E** E

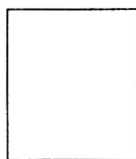
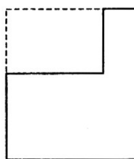
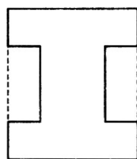
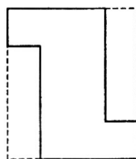
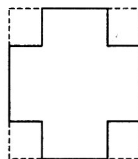
B13. Kiek mažųjų kvadratėlių prireiks sudėti figūrai, panašiai į pavaizduotą piešinyje, bet 10 kvadratėlių aukščio?



A 25 **B** 30 **C** 40 **D** 55 **E** 100

B14. Kiek laiko truks parašyti milijoną raidžių, jei per 1 minutę parašome 100 raidžių?
A 160 h 40 min **B** 166 h 40 min **C** 120 h 40 min **D** 18 h 10 min **E** 200 h

B15. Penki kaimynai A, B, C, D ir E turi vienodus stačiakampius sklypus. Kiekvienas kaimynas savo sklype aptvėrė tvora daržą:

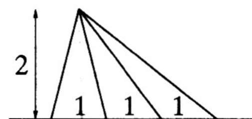

A

B

C

D

E

Kurio iš kaimynų tvora ilgiausia?
A A **B** B **C** C **D** D **E** E

B16. Skaičių a ir b skirtumas lygus 15. Jei a padidintume 3 vienetais, o b sumažintume 2 vienetais, tai skirtumas
A padidėtų 1 vienetu **B** padidėtų 5 vienetais **C** sumažėtų 1 vienetu
D sumažėtų 5 vienetais **E** pakistų priklausomai nuo a ir b

B17. Klubo narys A ateina į klubą kasdien, B – kas antrą dieną, C – kas trečią dieną, D – kas ketvirtą dieną, E – kas penktą dieną, F – kas šeštą dieną, G – kas septintą dieną. Šiandien klube jie visi. Po kelių dienų jie visi vėl susirinks klube?
A 27 **B** 28 **C** 210 **D** 420 **E** 5040

B18. Visų trikampių, kuriuos jūs galite įžiūrėti piešinyje, plotas yra:



A 3 **B** 4 **C** 7 **D** 8 **E** 10

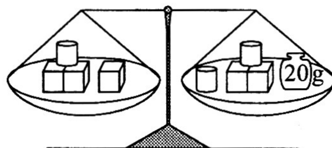
B19. Vieno mamos kengūros šuolio ilgis yra 3 metrai ir trunka 1 sekundę; jos mažo sūnaus šuolio ilgis yra 1 metras ir trunka pusę sekundės. Abi kengūros vienu metu iš tos pačios vietos pradeda šuoliuoti link eukalipto. Atstumas nuo pradinio taško iki medžio yra 180 metrų. Kiek sekundžių mama kengūra prie eukalipto turės laukti savo sūnaus?
A 30 **B** 60 **C** 10 **D** 120 **E** Jie atšuoliuos vienu metu

B20. Kiek procentų skaičiaus 2000 sudaro skaičius 2?
A 0,01 **B** 0,1 **C** 0,2 **D** 1 **E** 2

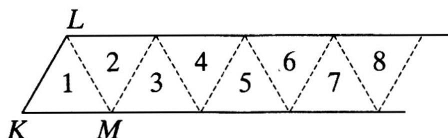
KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

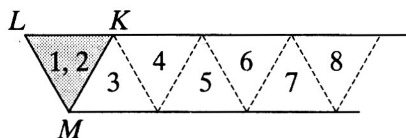
B21. Organizuojant vasaros stovyklą, kurioje vienu metu poilsiaus 96 vaikai, reikia pasirinkti, į kokio didumo grupes suskirstyti vaikus taip, kad kiekvienoje grupėje būtų tiek pat vaikų. Kiekvienoje grupėje turi būti daugiau kaip 5, bet mažiau kaip 20 vaikų. Keliais būdais tai galima padaryti?
A 10 **B** 8 **C** 5 **D** 4 **E** 2

B22. Visi kubeliai ir ritinėliai, esantys ant abiejų svarstyklių lėkščių, kartu sveria 500 gramų. Kiek gramų sveria vienas kubelis?
A 40 **B** 50 **C** 60 **D** 70 **E** 80

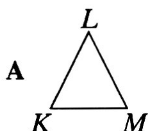


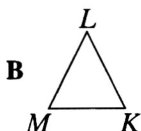
B23. Piešinyje pavaizduota ilga popieriaus juostelė, padalyta į 2000 trikampių brūkšninėmis linijomis. Tarkime, kad juostelė (žr. kairįjį brėžinį) lankstoma per brūkšnines linijas skaičiais pažymėta tvarka taip, kad juostelė visą laiką užima horizontalią padėtį, o jau sulankstyta kairėje juostelės dalis užlenkiama ant dešinės (dešiniajame brėžinyje pavaizduota viršūnių K, L, M padėtis po pirmo lenkimo).

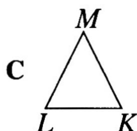


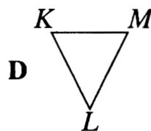


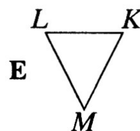
Kurią iš žemiau pavaizduotų padėčių užims viršūnės K, L, M po 1999 lenkimų?

A 

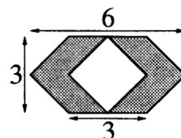
B 

C 

D 

E 

B24. Koks yra užtušuotos dalies plotas?
A 5 **B** 9 **C** 12 **D** 15 **E** 18

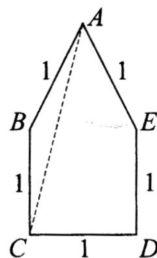


B25. Padaryti prekei 10% ir 20% nuolaidas paeiliui – tai tas pat, kas padaryti tik vieną nuolaidą. Kokią?
A 30% **B** 15% **C** 72% **D** 28% **E** Kitas atsakymas

B26. Yra 3 dėžutės ir 3 daiktai: moneta, kriauklelė ir žirnis. Kiekvienoje dėžutėje yra vienas daiktas, be to, žalia dėžutė yra į kairę nuo mėlynos dėžutės; moneta yra į kairę nuo žirnio; raudona dėžutė yra į dešinę nuo kriauklelės; žirnis yra į dešinę nuo raudonos dėžutės. Kurioje dėžutėje yra moneta?
A Raudonoje dėžutėje **B** Žalioje dėžutėje **C** Mėlynoje dėžutėje
D Nustatyti neįmanoma **E** Visų sąlygų išpildyti neįmanoma

B27. Brėžinyje kampas BAC yra lygus

A 15° **B** 12° **C** 30° **D** 20° **E** Kitas atsakymas

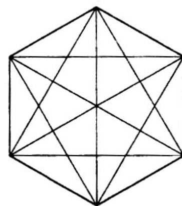


B28. Kelių skirtingų masių daiktus jūs galite pasverti vienu svėrimu dvilėkštėmis svarstyklėmis turėdami tris svarsčius – 1, 3 ir 9 kg?

A 3 **B** 6 **C** 7 **D** 13 **E** 14

B29. Kiek 30° kampų galima rasti šioje figūroje?

A 4 **B** 6 **C** 12 **D** 24 **E** 36



B30. Natūralusis skaičius N padalytas su liekana iš skaičių 11 ir 14. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių *negali* būti gautų liekanų suma?

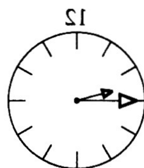
A 0 **B** 3 **C** 11 **D** 19 **E** 25

KADETAS (VII ir VIII klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

K1. Veidrodyje matome laikrodį. Kokį laiką jis rodo?



A 15:15 **B** 10:15 **C** 10:45 **D** 8:45 **E** 9:45

K2. Nespalvotoje (t. y. juodos ir baltos spalvų) nuotraukoje juoda spalva užima 80% ploto, o balta spalva – 20% ploto. Nuotrauka buvo padidinta tris kartus. Kiek procentų ploto užima balta spalva padidintoje nuotraukoje?

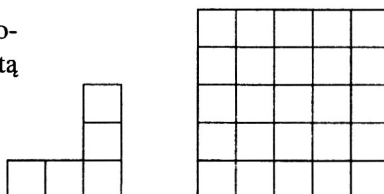
A 20 **B** 30 **C** 40 **D** 60 **E** 80

K3. Kiek laiko praeina nuo 11 val. 11 min. iki 13 val. 13 min.?

A 2 h 00 min **B** 12 h 12 min **C** 2 h 12 min **D** 2 h 02 min **E** 112 min

K4. Kiek daugiausiai tokių „kampų", kaip pavaizduotas kairiau, telpa į kvadratą 5 × 5, pavaizduotą dešiniau?

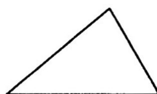
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6



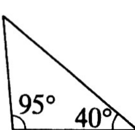
K5. Taisyklingojo šešiakampio visos kraštinės ir visi kampai lygūs. Kiek susikirtimo taškų gausime išvedę visas jo įstrižaines (neskaitant šešiakampio viršūnių)?

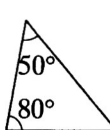
A 6 **B** 7 **C** 12 **D** 13 **E** 15

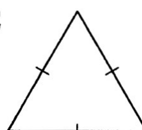
K6. Kuris trikampis tikrai yra lygiašonis, bet nėra lygiakraštis?

A


B


C


D


E


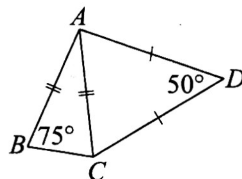
K7. Popierinės juostelės ilgis yra 1 m. Iš pradžių pažymime brūkšnelius, dalijančius juostelę į 4 lygias dalis, tada pažymime brūkšnelius, dalijančius juostelę į 3 lygias dalis. Dabar juostelę perkerpame ties kiekvienu pažymėtu brūkšneliu. Kelių skirtingų ilgių bus juostelės gabaliukai?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

K8. Septynių iš eilės einančių nelyginių skaičių suma lygi 119. Mažiausias iš tų skaičių yra:

A 11 **B** 13 **C** 15 **D** 17 **E** 19

K9. Brėžinyje $AD = DC$, $AB = AC$, $\angle ABC = 75°$, $\angle ADC = 50°$. Koks yra kampo BAD didumas?



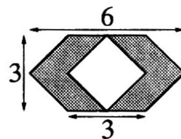
A 95° **B** 105° **C** 125° **D** 140° **E** 160°

K10. Cirko prižiūrėtojas dramblį išmaudo per 40 minučių. Jo sūnus tai padaro per 2 valandas. Kiek laiko prireiks prižiūrėtojui ir jo sūnui išmaudyti visus tris cirko dramblius, jei jie dirbs kartu?

A 30 min **B** 45 min **C** 60 min **D** 90 min **E** 100 min

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

K11. Koks yra užtušuotos dalies plotas?



A 5 **B** 9 **C** 12 **D** 15 **E** 18

K12. Jeigu vienodos raidės atitinka vienodus skaitmenis, o skirtingos raidės – skirtingus, tai 10 000 · AROO – 10 000 · KANG + KANGAROO =

A AROOAROO **B** AROOKANG **C** KANGKANG
D KANGAROO **E** KAGANROO

K13. Penkios ponios P, Q, R, S, T susitikusios bučiavosi. P bučiavosi vieną kartą, Q – taip pat vieną kartą, o kiekviena ponių R, S, T bučiavosi dukart. Yra žinoma, kad P bučiavosi su T. Kuri iš žemiau išvardytų ponių porų tikrai nesibučiavo?

A T ir S **B** T ir R **C** Q ir R **D** Q ir T **E** Q ir S

K14. Koks yra skritulio išpjovos kampas, jei išpjovos plotas sudaro 15% viso skritulio ploto?

A 15° **B** 36° **C** 54° **D** 90° **E** 150°

K15. 800 grašių vertė yra ta pati kaip 100 dukatų; 100 grašių vertė lygi 250 talerių vertei. Kiek dukatų turi tą pačią vertę kaip 100 talerių?

A 2 **B** 5 **C** 10 **D** 25 **E** 50

K16. Mama pirko dėžutę gabalinio cukraus. Marytė iš pradžių suvalgė viršutinį sluoksnį, tai yra 77 gabaliukus. Po to ji suvalgė šoninį sluoksnį iš 55 gabaliukų. Galų gale ji suvalgė ir priekinį sluoksnį. Kiek gabaliukų cukraus liko dėžutėje?

A 203 **B** 256 **C** 295 **D** 300 **E** 350

K17. Šokių varžybose visi teisėjai vertina dalyvius sveikuoju balų skaičiumi. Varžybų dalyvio gautų balų vidurkis yra 5,625. Kiek mažiausiai teisėjų galėjo būti?

A 2 **B** 6 **C** 8 **D** 10 **E** 12

K18. Apie Australijos Nacionalinio parko, kuriame gyvena kengūros, klimatą žinome, kad:

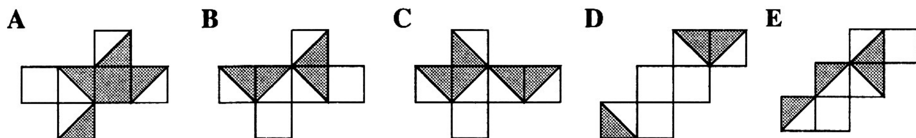
(1) jei šviečia saulė, tai temperatūra ne žemesnė kaip 25°;

(2) jei temperatūra aukštesnė kaip 26°, tai šviečia saulė.

Tada būtinai

A nakties temperatūra žemesnė kaip 25° **B** dienos temperatūra aukštesnė kaip 24°
C nakties temperatūra negali būti 27° **D** dienos temperatūra negali būti 24°
E jeigu temperatūra 25°, tai šviečia saulė

K19. Iš kurios dvispalvės figūros galima išlankstyti kubą taip, kad bet kurios dvi sritys, kurios turi bendrą briauną, būtų vienos spalvos?

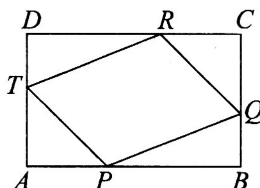


K20. Po trejų metų Stasys turės tris kartus daugiau metų negu jis turėjo prieš trejus metus. Po ketverių metų Stasys turės [redacted] daugiau metų negu jis turėjo prieš ketverius metus. Kokie žodžiai paslėpti?

A du kartus **B** tris kartus **C** keturis kartus **D** penkis kartus **E** šešis kartus

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

K21. Taškai P, Q, R ir T dalija stačiakampio $ABCD$ kraštines santykiu 1 : 2, kaip pavaizduota brėžinyje. Lygiagretainio $PQRT$ plotas S_{PQRT} lygus



A $\frac{2}{5}S_{ABCD}$ **B** $\frac{3}{5}S_{ABCD}$ **C** $\frac{4}{9}S_{ABCD}$ hbr **D** $\frac{5}{9}S_{ABCD}$
E $\frac{2}{3}S_{ABCD}$

K22. Vilius gavo dovanų dėžę su 2000 penkių spalvų žirnelių. 387 iš jų buvo balti, 396 geltoni, 402 raudoni, 407 žali ir 408 rudi. Vilius nusprendė čiulpti saldainius taip. Jis nežiūrėdamas išima iš dėžės 3 žirnelius. Jeigu jie visi vienos spalvos, jis sučiulpia saldainius, priešingu atveju grąžina juos į dėžę. Taip jis darė visą mėnesį. Galų gale dėžėje liko tik du saldainiai. Kokios jie buvo spalvos?

A Balti **B** Geltoni **C** Raudoni **D** Žali **E** Rudi

K23. Stačiojo trikampio ABC įžambinė AC padalyta į 8 lygias dalis septyniomis atkarpomis, lygiagrečiomis statiniui BC. Kam lygi šių 7 atkarpų ilgių suma, jeigu $BC = 10$?

A Nustatyti neįmanoma **B** 50 **C** 70 **D** 35 **E** 45

K24. Inga turi daugybę kaladėlių, kurios visos yra vienodi $2\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$ stačiakampiai gretasieniai. Ji nori iš kaladėlių sudėti kubą. Kiek mažiausiai kaladėlių jai prireiks?

A 6 **B** 12 **C** 36 **D** 216 **E** 288

K25. Didėjimo tvarka rašome natūraliuosius skaičius, lygius visų savo tikrinių daliklių sandaugai (1 ir pats skaičius nėra tikriniai dalikliai). Koks bus šeštas skaičius?

A 14 **B** 15 **C** 21 **D** 22 **E** 25

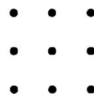
K26. Magiškas stačiakampis iš odos („Šagrenės oda") kiekvieną kartą įvykdęs šeimininko norą susitraukia puse savo ilgio ir trečdaliu savo pločio. Tris kartus įvykdžius šeimininko norą, stačiakampio plotas pasidarė $4\,\mathrm{cm}^2$. Pradinis plotis buvo 9 cm. Koks buvo pradinis ilgis?

A 12 **B** 36 **C** 4 **D** 18 **E** Nustatyti neįmanoma

K27. Pranukas turėjo šešias lazdeles, bet vieną pametė. Koks galėjo būti pamestosios lazdelės ilgis, jei kitų lazdelių ilgiai yra 25, 29, 33, 37 ir 41, o Pranukas atsimena, kad iš visų šešių lazdelių jam buvo pavykę sudėti lygiakraštį trikampį?

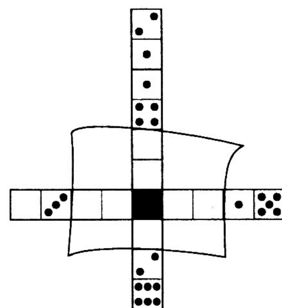
A 19 **B** 20 **C** 21 **D** 22 **E** 23

K28. Kiek daugiausiai egzistuoja nelygių nestačiųjų trikampių, kurių viršūnės yra pažymėtuose taškuose?



A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

K29. Devyni skirtingi domino kauliukai sudaro figūrą, kurios dalį dengia servetėlė. Kauliukai sudėti taip, kad 1 yra greta 1, 2 – greta 2 ir t.t. Kiek taškų yra užtušuotame kvadratėlyje?



A 2 **B** 3 **C** 4 **D** Kitas atsakymas

E Nustatyti neįmanoma

K30. Nustatykite, koks yra paskutinis skaitmuo skaičiaus $\frac{1}{5^{2000}}$ dešimtainiame užraše.

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 5

JUNIORAS (IX ir X klasės)

KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS



J1. Baltasis Triušis meluodavo tik pirmadieniais, antradieniais ir trečiadieniais. Sykį jis sutiko Alisą ir pasakė du teiginius:
1) „Vakar aš melavau“.
2) „Poryt ir užporyt aš meluosiu“.
Prisiminusi tai ir truputį pagalvojusi, Alisa nustatė, kad Baltąjį Triušį ji buvo susitikusi
A pirmadienį **B** antradienį **C** trečiadienį
D ketvirtadienį **E** penktadienį

J2. Skaičius $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{200}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{200}$ lygus

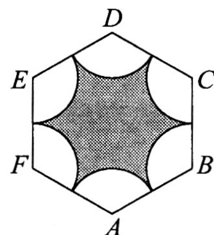
A $\frac{5^{200}-1}{4}$ **B** $\frac{5^{200}+1}{4}$ **C** 4^{1000} **D** 1 **E** 0

J3. Jonas turi 9 vienodo dydžio kvadratus. Trijuose iš jų parašyta raidė B, trijuose – raidė M ir trijuose – raidė R. Keliais būdais iš tų kvadratų galima sudėti lentelę 3 × 3 taip, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje raidės būtų skirtingos? (Brėžinyje parodytas vienas iš galimų būdų.)

M	B	R
R	M	B
B	R	M

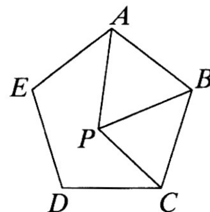
A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 10 **E** 12

J4. *ABCDEF* yra taisyklingasis šešiakampis (žr. brėžinį). Iš jo viršūnių kaip iš centrų nubrėžti šeši apskritimai su lygiais spinduliais taip, kad visi jie paeiliui liečia vienas kitą. Šešiakampio *ABCDEF* perimetras lygus 36. Koks yra užtušuotos figūros perimetras?



A 15π **B** 12π **C** 9π **D** 6π **E** 3π

J5. Brėžinyje pavaizduotas taisyklingasis penkiakampis *ABCDE* ir taisyklingasis trikampis *ABP*. Koks yra kampo *BCP* didumas?

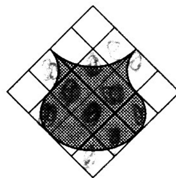


A 45° **B** 54° **C** 60° **D** 66° **E** 72°

J6. Kambaryje buvo keletas asmenų. Jų amžiaus vidurkis buvo kaip tik lygus asmenų skaičiui. Staiga į kambarį įžengė 29 metų amžiaus vyras, bet ir dabar kambaryje esančių asmenų amžiaus vidurkis buvo lygus asmenų skaičiui. Kiek asmenų buvo kambaryje iš pradžių?

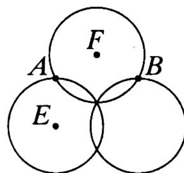
A 14 **B** 15 **C** 16 **D** 17 **E** 18

J7. Gardelę, pavaizduotą brėžinyje, sudaro kvadratai 2 cm × 2 cm. Koks yra plotas „ąsočio“, apriboto apskritimų lankais?
A 32 cm^2 **B** 28 cm^2 **C** 24 cm^2 **D** 20 cm^2 **E** 16 cm^2



J8. Daugianario $p(x) = x^5 + bx + c$ koeficientai – sveikieji skaičiai, o $p(3) = 0$. Tada c negali būti lygus
A 10 **B** 12 **C** 15 **D** 36 **E** 9

J9. Trys spindulio r apskritimai išsidėstę simetriškai ir kertasi bendrame taške (žr. brėžinį). E ir F yra du iš centrų, o A ir B yra du iš susikirtimo taškų. Kam lygus skirtumas $AB - EF$?
A $(2-\sqrt{3})r$ **B** $(\sqrt{2}-1)r$ **C** 0 **D** $(\sqrt{3}-2)r$ **E** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})r$



J10. Sakykime, kad $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots + (-1)^{n-1}n$ $(n \in N)$. Tada suma $S_{1999} + S_{2000}$ lygi
A neigiamajam skaičiui **B** 0 **C** 17 **D** 18 **E** 20

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

J11. Kvadratas K buvo padalytas į 2000 mažesnių kvadratų, ir 1999 iš jų yra vienetiniai, o vieno iš jų plotas nelygus vienetui. Kvadrato K plotas lygus
A 500^2 **B** 999^2 **C** 1 000 000 **D** 1999^2 **E** kitam skaičiui

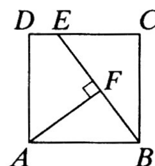
J12. Kiek yra tokių sutvarkytųjų porų (x, y), kad visi trys teiginiai:
1) x lyginis; 2) y pirminis; 3) $0 < x\sqrt{y} < 10$
būtų teisingi?
A 10 **B** 11 **C** 12 **D** 13 **E** 14

J13. Jolanta namų darbams turi išspręsti 40 kvadratinių lygčių. Norėdama ją paskatinti, mama siūlosi mokėti po pusę lito už kiekvieną teisingai išspręstą lygtį, bet atsiimti vieną litą už kiekvieną neteisingą sprendimą. Jolanta sprendė visus uždavinius ir gavo iš mamos 2 litus. Kiek uždavinių Jolanta išsprendė teisingai?

A 25 **B** 26 **C** 27 **D** 28 **E** 29

J14. Mama nupirko dėžutę gabalinio cukraus. Marytė smaližiavo kasdien ir iš pradžių suvalgė viršutinį sluoksnį, tai yra 77 gabaliukus. Tada ji suvalgė šoninį sluoksnį iš 55 gabaliukų. Galų gale ji suvalgė ir priekinį sluoksnį. Kiek gabaliukų cukraus liko dėžutėje?
A 203 **B** 256 **C** 295 **D** 300 **E** 350

J15. Kai Liucija užlipo ant svarstyklių, jos parodė 67 kg. Kai Roma užlipo ant tų pačių svarstyklių, jos parodė 59 kg. Kai jos abi užlipo ant svarstyklių, svarstyklės parodė 131 kg. Tik dabar mergaitės pamatė, kad sulenkta svarstyklių rodyklė, kurios smaigalys parodo masę. Kiek iš tikrųjų sveria Liucija?
A 54 kg **B** 62 kg **C** 64 kg **D** 70 kg **E** 72 kg

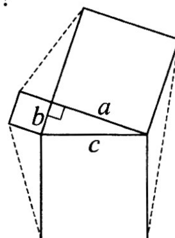


J16. $ABCD$ yra kvadratas. Raskite atkarpos EC ilgį, jei $AF = 4$ cm, o $FB = 3$ cm.

A 2,75 **B** 3,25 **C** 3,5 **D** 3,75 **E** Nustatyti neįmanoma

J17. Keleivinis keltas veža tam tikrą keleivių skaičių x pagrindiniame denyje ir mažesnį jų skaičių y užpakaliniame denyje. Skaičiai x ir y neturi bendrų daliklių, didesnių už 1, o $xy = 300$. Kiek skirtingų porų (x, y) tenkina šias sąlygas?

A 1 **B** 3 **C** 4 **D** 9 **E** 18



J18. Pitagoro teoremą iliustruojančiame brėžinyje sujungę gretimų kvadratų kampus (žr. brėžinį) gauname šešiakampį. Šešiakampio plotas yra

A $ab + \frac{5}{2}(a^2 + b^2)$ **B** $2ab + \frac{3}{2}(a^2 + b^2)$ **C** $\frac{3}{2}ab + 2(a^2 + b^2)$

D $2(ab + a^2 + b^2)$ **E** $\frac{5}{2}ab + 2(a^2 + b^2)$

J19. Imkime plokštumos taškus $A(-2; -1)$ ir $B(2; 2)$. Jeigu $C(x; 1)$ yra toks taškas, kad suma $AC + CB$ mažiausia, tai x lygus

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** 1 **E** $\frac{4}{3}$

J20. Skaičius $\overline{6pqpqpq}$ dalijasi iš 18. Kai atmetame pirmą ir paskutinį skaitmenį, tai naujasis skaičius tikrai dalijasi iš 6. Kam lygus skaitmuo p?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 0

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

J21. Visi natūralieji skaičiai surašyti didėjimo tvarka, ir kiekvieną jų reikia nuspalvinti viena iš dviejų spalvų pagal tokią taisyklę: jeigu skaičius raudonas, tai jo penktas kaimynas iš dešinės turi būti mėlynas; jeigu skaičius mėlynas, tai jo penktas kaimynas iš dešinės turi būti raudonas. Kiek yra būdų tai padaryti?

A 2 **B** 25 **C** 32 **D** 125 **E** 256

J22. Taškas pastoviu greičiu juda kvadrato $ABCD$ kraštinėmis ($ABCDABCD\ldots$). Kitas taškas tokiu pat greičiu juda įstrižaine AC ten ir atgal ($ACACAC\ldots$). Tam tikru momentu abu taškai atsidūrė viršūnėje A. Kuris iš išvardytų teiginių yra teisingas?

A Abu taškai vėl susitiks taške A

B Abu taškai vėl susitiks taške A, jei kvadrato kraštinė lygi $\sqrt{2}$

C Taškai niekada nebesusitiks

D Taškai susitiks taške C

E Taškai susitiks taške C, jei kvadrato kraštinė lygi π

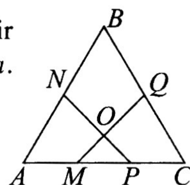
J23. Keturios katės Dona, Tina, Beta ir Liza medžiojo peles. Tina ir Liza kartu pagavo tiek pat pelių, kiek Beta ir Dona. Dona pagavo daugiau pelių už Betą. Dona ir Liza kartu pagavo mažiau pelių negu Tina ir Beta kartu. Tina pagavo 3 peles. Kiek pelių pagavo Beta?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

J24. Taisyklingojo trikampio ABC kraštinė lygi a. Taškai M, N, P ir Q (žr. brėžinį) išsidėstę taip, kad $MA + AN = PC + CQ = a$. Raskite kampą NOQ.

A 45° **B** 60° **C** 75° **D** Nustatyti neįmanoma

E Kitas atsakymas

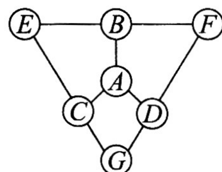


J25. Palei kelią vienodais tarpais susodinti medeliai. Kengūra stovi šalia pirmo iš jų ir gali vienu šuoliu nušokti prie sekančio arba prie dar sekančio medelio. Kengūra gali šokinėti tik viena kryptimi. Keliais skirtingais būdais ji gali pasiekti vienuoliktą medelį?

A 80 **B** 84 **C** 87 **D** 89 **E** 91

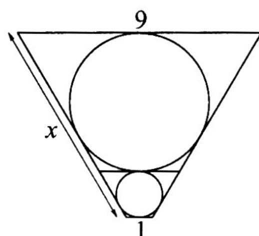
J26. Natūralieji skaičiai nuo 1 iki 7 taip išdėstyti po skrituliais A, B, C, D, E, F ir G, kad kiekvieno iš trijų keturkampių viršūnėse esančių skaičių suma lygi 15. Koks skaičius gali būti po skrituliu A?

A 1 **B** 2 **C** 4 **D** 5 **E** 6



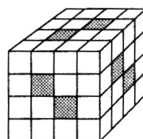
J27. Jeigu didesniojo apskritimo spindulys yra triskart didesnis už mažojo apskritimo spindulį, tai x brėžinyje lygus

A 9 **B** 8 **C** $6\sqrt{3}$ **D** $6\sqrt{2}$ **E** 7,5



J28. Kube, suklijuotame iš 64 kubelių $1 \times 1 \times 1$, pragręžtos 6 kvadratinės skylės. Jos eina statmenai per brėžinyje pažymėtus kvadratėlius. Kiek kubelių $1 \times 1 \times 1$ liko kube?

A 40 **B** 42 **C** 44 **D** 46 **E** 50

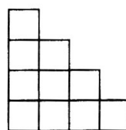


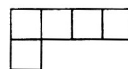
J29. Petriukas ir Marytė susilažino, kas geriau spėja, kuria puse atvirs metama moneta, ir pastatė po 20 saldainių. Jie pakaitomis metė monetą – vienas meta, o kitas spėja, ir jei atspėja, tai gauna tašką, o jei neatspėja, tai tašką gauna metantysis. Pirmas, kuris surenka 10 taškų, laimi visus 40 saldainių. Jie buvo priversti nutraukti žaidimą, kai Petriukas turėjo 7 taškus, o Marytė – 9 taškus, ir nusprendė saldainius pasidalyti proporcingai kiekvieno galimybėms laimėti, jei žaidimas būtų tęsiamas. Kiek saldainių teks Marytei?

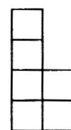
A 20 **B** 25 **C** 30 **D** 32 **E** 35

J30. Visi trys brėžinukai vaizduoja tą pačią „pilį“, pastatytą iš medinių kubelių, kai į ją žiūrime iš priekio, iš viršaus ir iš kairės. Kiek kubelių sunaudota pastatyti šiai piliai?

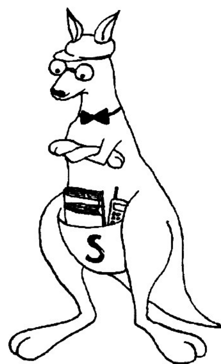
A 10 **B** 11 **C** 12 **D** 13 **E** 14


Iš priekio


Iš viršaus


Iš kairės

SENJORAS (XI ir XII klasės)



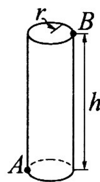
KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

S1. Vairuotojas savo kelionę automobiliu pradėjo taške A, po to nuvažiavo 10 km į šiaurę, po to 10 km į rytus, po to 6 km į pietus, po to 2 km į vakarus, tada 8 km į šiaurę, tada 4 km į vakarus, o tada 9 km į pietus ir baigė kelionę taške B. Atstumas nuo A iki B yra lygus
A 0 km **B** 1 km **C** $\sqrt{5}$ km **D** 5 km **E** $10\sqrt{2}$ km

S2. Baltasis Triušis visada meluodavo pirmadieniais, antradieniais ir trečiadieniais, o kitomis savaitės dienomis sakydavo tiesą. Kurią savaitės dieną jis galėjo pasakyti: 1) „Aš melavau vakar." 2) „Aš meluosiu rytoj."
A Pirmadienį **B** Antradienį **C** Ketvirtadienį **D** Sekmadienį
E Tokios dienos nėra

S3. Marytės tėtis yra 4 metais vyresnis už jos mamą, o jos tėvelių amžiaus vidurkis yra 39 metai. Marytės ir jos tėčio amžiaus vidurkis yra 23 metai. Kiek metų Marytei?
A 5 **B** 7 **C** 11 **D** 13 **E** 15

S4. Kokia yra skaičiaus $3^{20} \cdot 5^{30} - 2$ dalybos iš 15 liekana?
A 0 **B** 2 **C** 5 **D** 8 **E** 13



S5. Koks yra atstumas nuo taško A iki taško B matuojant ritinio paviršiumi, jei $r = 1$, $h = 6$?
A 7 **B** 8 **C** $2\sqrt{10}$ **D** $\sqrt{\pi^2 + 36}$ **E** $2\sqrt{\pi^2 + 9}$

S6. Sizifas kiekvieną dieną privalo užnešti po akmenį į kalno viršūnę. Pirmą dieną kopdamas į kalną ir leisdamasis žemyn jis užtruko 7 valandas. Darbas nuobodus, todėl vėliau kiekvieną dieną jis į kalną kopė dvigubai lėčiau nei praėjusią dieną, bet nuo kalno leidosi dvigubai greičiau. Jei antrą dieną jis užtruko 8 valandas, tai kiek laiko jis užtruko trečią dieną?
A 9 h **B** 8 h 30 min **C** 7 h **D** 13 h **E** 10 h

S7. Erdvėlaivis išskrido į planetą X, kuri nuo Žemės nutolusi 2^{20} km. Kai laivas įveikė lygiai ketvirtadalį atstumo, jis prarado radijo ryšį su Žeme. Ryšį pavyko atstatyti, kai erdvėlaivis buvo nutolęs 2^{19} km nuo Žemės. Kiek kilometrų erdvėlaivis skrido be ryšio su Žeme?
A 2^8 **B** 2^9 **C** 2^{10} **D** 2^{18} **E** 2^{19}

S8. Keleivinis keltas veža tam tikrą skaičių x keleivių pagrindiniame denyje ir mažesnį jų skaičių y užpakaliniame denyje. Skaičiai x ir y neturi bendrų daliklių, didesnių už 1, o $xy = 300$. Kiek mažiausiai keleivių gali būti kelte?
A 30 **B** 35 **C** 37 **D** 56 **E** 79

S9. Skaičius $\overline{xyz}$ yra triženklis, ir $x > z$. Skirtumas $\overline{xyz} - \overline{zyx}$ yra triženklis skaičius, kurio pirmas skaitmuo yra 4. Tada šis skirtumas lygus

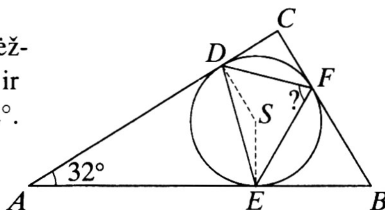
A 459 **B** 495 **C** Nustatyti neįmanoma **D** 454 **E** 445

S10. a yra natūralusis skaičius. Suma $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$ lygi skaičiui, kurio visi skaitmenys vienodi. Koks tai skaitmuo?

A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 9 **E** Tai neįmanoma

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

S11. Brėžinyje pavaizduotas trikampis ABC ir į jį įbrėžtas apskritimas, kurio centras S. Taškai D, E ir F yra lietimosi taškai. Kampas DAE lygus 32°. Kam lygus kampas DFE?



A 46° **B** 58° **C** 64° **D** 74°

E Be papildomų duomenų nustatyti neįmanoma

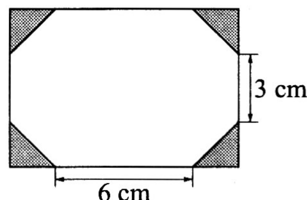
S12. Marius nori pirkti televizorių, kuris kainuoja 5400 litų. Paklaustas apie jo santaupas, jis atsakė: „Jeigu mano santaupos būtų penktadaliu didesnės negu dabar yra, tai man trūktų ketvirtadaliu mažiau negu trūksta dabar.“ Kiek litų Marius turi susitaupęs?

A 600 **B** 1200 **C** 2400 **D** 3000 **E** 3200

S13. Su kuriuo sveikuoju n taisyklingasis n-kampis turi lygiai $6n$ įstrižainių?

A 13 **B** 15 **C** 17 **D** 35 **E** 65

S14. Nuo stačiakampio medžiagos gabalo nukirpus keturis vienodus lygiašonius trikampius, išėjo aštuonkampė servetėlė, kurios plotas lygus $62\,\text{cm}^2$ (žr. brėžinį). Kiek kvadratinių centimetrų medžiagos nukirpta?



A 16 **B** 12 **C** 8 **D** 6

E Be papildomų duomenų nustatyti negalima

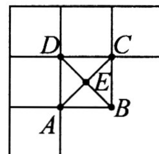
S15. Jei $2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^x$, tai $x =$

A 997 **B** 779 **C** 499 **D** 449 **E** 399

S16. Buvo bandomas naujas antibiotikas. Pirma dozė sustabdo bakterijų dauginimąsi, o kiekviena sekanti dozė (duodama 8 valandų intervalais) užmuša 50% likusių bakterijų. Eksperimento pradžioje kolboje buvo 1 000 000 bakterijų. Kiek bakterijų liks gyvų praėjus 48 valandoms po pirmos dozės?

A 5^3 **B** 5^6 **C** 10^3 **D** $\frac{10^4}{3}$ **E** $\frac{10^6}{6}$

S17. Brėžinyje pavaizduotas daugiakampis R, kurį sudaro 6 vienodi $1\,\text{cm}^2$ ploto kvadratai. Pasirenkame vieną iš taškų A, B, C, D, E simetrijos centru ir braižome daugiakampį R', simetrišką daugiakampiui R pasirinkto centro atžvilgiu.



Kurį iš taškų A, B, C, D, E reikia pasirinkti simetrijos centru, kad daugiakampių R ir R' sąjungos (t. y. užtušuotos srities, gautos užtušavus daugiakampius R ir R') plotas būtų lygus $8\,\text{cm}^2$?

A A **B** B **C** C **D** D **E** E

S18. Keliais būdais skaičių 447 galima išreikšti paeiliui einančių nelyginių dėmenų suma?

A 1 **B** 3 **C** 4 **D** 8 **E** Kitas atsakymas

S19. Dvi valstybes A ir B jungia oro linija. Skrydžiai į vieną ir į kitą pusę trunka tiek pat, bet dėl skirtingų laiko juostų tvarkaraštis (visur nurodomas vietinis laikas) yra toks:

Išvykimas iš A pirmadienį 6 val. ryto.
Atvykimas į B antradienį 2 val. po vidurdienio.
Išvykimas iš B ketvirtadienį 1 val. po vidurdienio.
Atvykimas į A ketvirtadienį 3 val. po vidurdienio.

Koks laikas valstybėje B, kai valstybėje A yra šeštadienio 4 valanda po vidurdienio?

A Šeštadienio 6 val. po vidurdienio **B** Šeštadienio 7 val. po vidurdienio
C Sekmadienio 6 val. ryto **D** Sekmadienio 7 val. ryto
E Sekmadienio 7 val. po vidurdienio

S20. Kubo briaunos ilgis yra 2 cm, o rutulio centras sutampa su kubo centru. Visų kubo paviršiaus taškų aibę pažymėkime K, o visų rutulio paviršiaus taškų aibę – S. Aibių K ir S sankirtą sudaro šeši apskritimai tada ir tik tada, jei rutulio spindulys r tenkina nelygybę

A $1 < r \leqslant \sqrt{2}$ **B** $1 \leqslant r < \sqrt{2}$ **C** $r \leqslant \sqrt{2}$ **D** $1 < r < \sqrt{3}$ **E** $\sqrt{2} \leqslant r < \sqrt{3}$

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

S21. Zondas, kuris visai neseniai nusileido Marse, padarė įdomių atradimų: marsiečiai yra 1 m ūgio, jie visi yra raudoni, žali arba mėlyni, kiekvienas iš jų turi nuo 2 iki 5 rankų, o ant galvos jie turi nuo 3 iki 20 mažyčių antenų. Kiek mažiausiai gyventojų turi būti Marse, kad tarp jų tikrai atsirastų 11 vienodų žaidėjų žaisti futbolo rungtynes su Žemės kosmonautų komanda? (Visi 11 marsiečių turi būti tos pačios spalvos, jie turi turėti po vienodai rankų ir antenų.)

A 216 **B** 217 **C** 2160 **D** 2161 **E** 2375

S22. Vienintelis sveikasis skaičius n, su kuriuo teisinga lygybė

$$\left[\left(2^{2^n}+1\right)\cdot\left(2^{2^n}-1\right)+1\right]^{\frac{1}{4}}=256,$$

priklauso aibei

A $\{1, 2, 3\}$ **B** $\{4, 5, 6\}$ **C** $\{7, 8, 9\}$ **D** $\{10, 11, 12\}$ **E** $\{13, 14, 15\}$

S23. Kiek vienetinio kvadrato viduje ir išorėje yra taškų, kurių kiekvienas vienodai nutolęs nuo dviejų gretimų viršūnių ir per vienetą nutolęs nuo trečios viršūnės?

A 0 **B** 2 **C** 4 **D** 8 **E** Daugiau kaip 8

S24. Vasaros stovykloje 10 berniukų ruošiasi pažaisti tinklinį. Keliais būdais jie gali pasidalyti į dvi komandas po 5 žaidėjus kiekvienoje, jeigu Matas būtinai nori žaisti vienoje komandoje su Karoliu, o Viktoras nenori žaisti su Andriumi?

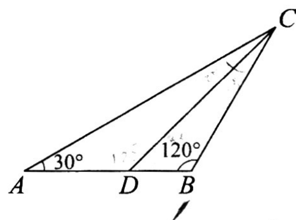
A 15 **B** 20 **C** 25 **D** 30 **E** 50

S25. Kiek yra natūraliųjų skaičių, kurių antras pagal didumą daliklis yra 91? (Pastaba: tarp kiekvieno natūraliojo skaičiaus daliklių yra vienetas ir pats tas skaičius.)

A 8 **B** 6 **C** 5 **D** 4 **E** 3

S26. Trikampyje ABC (žr. brėžinį) $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CBA = 120^\circ$, CD – kampo ACB pusiaukampinė. Tada $\dfrac{BC}{CD} =$

A $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **B** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **C** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **E** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$



S27. Atliekant matematikos testą, Jonukui reikėjo sudauginti du dviženklius sveikuosius skaičius. Apsirikęs jis sukeitė vieno skaičiaus skaitmenų tvarką ir gavo rezultatą 3816 vienetais didesnį negu turėjo gauti. Koks turėjo būti teisingas rezultatas?

A 7632 **B** 5724 **C** 4823 **D** 1908 **E** 1007

S28. Natūraliojo skaičiaus n skaitmenų sandaugą pažymėkime $p(n)$. Suma

$$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(2000)$$

lygi

A 45 200 **B** 2000 **C** 200 000 **D** 184 320 **E** 180 000

S29. Svarstyklėmis daiktą galima pasverti padėjus jį ant vienos iš dviejų lėkščių, o tada dedant svarstelius ant kitos ar ant abiejų lėkščių, kol svarstyklės pasidarys pusiausviros. Tarkime, kad mes norime vienu svėrimu pasverti bet kurį iš daiktų, kurių masė gramais – sveikieji skaičiai nuo 1 iki 10. Kiek mažiausiai svarstelių mums reikia?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 10

S30. $ABCD$ yra tetraedras (taisyklingoji trikampė piramidė, kurios visos briaunos lygios). Reikia išvesti plokštumą, nuo kurios taškai A, B, C ir D būtų nutolę vienodai. Kiek yra tokių plokštumų?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

SPRENDIMAI

MAŽYLIS (III ir IV klasės)

M1. Ⓑ 15 minučių

? Čia nuovokumo (ar pastabumo) uždavinys – sprendžiantį mažylį bandoma apgauti, ir labai dažnas atsakys, kad 10 žvakučių degs 150 minučių. Iš tikrųjų – ar degs viena, ar dvi, ar 10 žvakučių ant torto, jos sudegs per tą patį laiką, t. y. per 15 minučių, ir teisingas atsakymas B.

! Kadangi žvakutės uždegamos vienu metu, tai jos visos sudegs per 15 minučių. Net jeigu uždavinyje nebūtų pasakyta, kad jos uždegamos vienu metu, vis tiek reikėtų rinktis atsakymą B: juk arba turi būti pasakyta, kaip tos žvakutės deginamos, arba reikia pačiam susigaudyti, kada ir kaip torto žvakutės uždegamos.

M2. Ⓒ 40

? Šis uždavinys taip pat apgaulingas. Bet iš sąlygos kaip ir aišku, kad pirmą tabletę Barmalėjus nuris iš karto, tada antrą – po 20 minučių, todėl trečią – po 40 minučių. Renkamės atsakymą C.

! Nepasakyta, kada Barmalėjus turi pradėti vartoti tabletes, todėl tarsi aišku, kad jis turi pradėti jas ryti iš karto (juk Aiskauda nesiunčia Barmalėjaus į vaistinę). Jeigu galvotume, kad jis nebūtinai jas ris iš karto, tai apibrėžto atsakymo į uždavinio klausimą nebūtų – tai galėtų užsitęsti kiek norint. Vis dėlto, jei sąlygą suprastume taip, kad klausiama, kiek minučių praeis nuo pirmos tabletės nurijimo iki paskutinės tabletės nurijimo, tai atsakymas liktų tas pats.

!! Uždavinys susišaukia su tokiu uždaviniu.
Tiesėje viena kryptimi kas 20 cm įkalami 3 kuoliukai. Koks bus atstumas tarp pirmo ir trečio kuoliuko?
Sprendimas aiškus – jei yra trys kuoliukai, tai trečias kuoliukas nuo pirmo kuoliuko bus nutolęs 40 cm. Ir iš viso – tokius uždavinius sprendžiame kas dieną. Beje, grįžkime prie tablečių: įsivaizduokime, kad tabletė veikia 20 minučių. Tada 3 tabletės (nuryjamos kas 20 minučių) veiks 60 minučių. Tai dar kartą įspėja – reikia būti budriam!

M3. Ⓓ 222

? Nieko čia neatspėsi – reikia tikrinti.

$$1 \cdot 1 \cdot 2 = 2,\ 1 + 1 + 2 = 4,\ 2 < 4.$$
$$2 \cdot 0 \cdot 9 = 0,\ 2 + 0 + 9 = 11,\ 0 < 11.$$
$$3 \cdot 1 \cdot 2 = 6,\ 3 + 1 + 2 = 6,\ 6 = 6.$$
$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8,\ 2 + 2 + 2 = 6,\ 8 > 6.$$

Kadangi $2 \cdot 2 \cdot 2 > 2 + 2 + 2$, tai renkamės atsakymą D.

! Jau patikrinome 4 atsakymus. Liko patikrinti paskutinį variantą:

$$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2,\ 2 + 1 + 1 = 4,\ 2 < 4.$$

Taigi tinka vienintelis atsakymas D.

M4. Ⓐ 3

? Ir vėl neapsigaukite – dauginti aukšto numerį 2 iš 2 būtų klaida.
Sakykime, pavyzdžiui, kad Kūlverstukui reikia įveikti 30 laiptelių. Tada Genai reikia įveikti 60 laiptelių. Taigi Krokodilui Genai reikia įveikti dar tiek pat laiptelių, kiek jis įveikia užlipdamas iki antro aukšto. Vadinasi, įveikęs 60 laiptelių jis užlips iki 3 aukšto. Renkamės atsakymą A.

! Sakykime, kad Kūlverstukui reikia įveikti n laiptelių. Tada Genai reikia įveikti $2n$ laiptelių. Kai jis užlipa iki antro – Kūlverstuko aukšto, jis įveikia n laiptelių. Taigi jam lieka įveikti $2n - n = n$ laiptelių, t. y. dar tiek pat. Įveikęs tuos n laiptelių, jis atsiduria 3 aukšte. Todėl teisingas tik atsakymas A.

!! Dažname name net norint patekti į pirmą aukštą reikia įveikti keletą laiptelių. Kadangi apie tokius laiptelius uždavinyje nekalbama, tai laikome, kad jų nėra (priešingu atveju trūktų duomenų).

M5. Ⓑ 11

? Spėti paprastai geriausia nuo vidurio, ypač jeigu skaičiai didėja ar mažėja. Jei saldainiukas kainuotų 12 kronų, tai gautume $4 \cdot 7 + 3 \cdot 12 = 64$ kronas, – per daug. Imkime 11 kronų: $4 \cdot 7 + 3 \cdot 11 = 61$, – tinka. Taigi renkamės atsakymą B.

! Kadangi bendra kaina didėja, kai didėja saldainiuko kaina, tai aišku, kad atsakymas B vienintelis.

Žinoma, paprasčiausia spręsti uždavinį taip. Kadangi 4 šokoladukai kainuoja $4 \cdot 7 = 28$ kronas, tai 3 saldainiukai kainuoja $61 - 28 = 33$ kronas, todėl vienas saldainiukas kainuoja $33 : 3 = 11$ kronų.

M6. Ⓒ 3

? Ir vėl mus bando apgauti, tarytum siūlo samprotauti taip:
jei vieno autobuso užtenka pervežti 40 žmonių,
dviejų autobusų užtenka pervežti 80 žmonių,
tai keturių autobusų užtenka pervežti 160 žmonių.
Taip ir norisi pasirinkti atsakymą D. Bet uždavinio klausimas – ne kiek autobusų *užtenka*, o kiek autobusų *reikia* pervežti 160 žmonių. Tikriname vidurinį atsakymą C (jau sakėme – kai skaičiai išrikiuoti, verta pradėti nuo vidurio). Trimis autobusais galima pervežti $3 \cdot 55 = 165$ žmones, todėl pervežti 160 žmonių trimis autobusais tikrai galima.
Renkamės atsakymą C.

! Dviejų autobusų neužtenka – jais galima pervežti tik 110 žmonių. Vadinasi, tinka tik atsakymas C.

!! Galima autobusų skaičių pažymėti x ir sudaryti nelygybę $55x \geqslant 160$. Iš jos gauname $x \geqslant 3$. Taigi reikia mažiausiai trijų autobusų.

Beje, vengiant neaiškumų klausimas galėtų būti taip ir formuluojamas: „Kiek mažiausiai 55 vietų autobusų reikia pervežti 160 žmonių?“

M7. Ⓐ 1



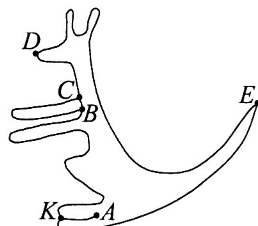
? Visi atsimename, kad lošimo kauliukų sienelės turi skirtingą akučių skaičių – nuo 1 iki 6. Bet taip pat lyg tai atsimename, kad sienelei su 6 taškais priešinga sienelė turi 1 tašką. Todėl viršutinio kauliuko apatinė sienelė yra 1. Vadinasi, vidurinio kauliuko viršutinė sienelė yra 1, o apatinė – 6. Todėl apatinio kauliuko viršutinė sienelė yra 6, o apatinė – 1.
Renkamės atsakymą A.

! Nesame tikri, kad prieš sienelę 6 kauliuke yra sienelė 1. Be to, jeigu net ir būtų – kas galėtų uždrausti pasigaminti ir kitokį kauliuką (ir iš tikrųjų jų būna visokių – ne kiekvienas gamintojas laikosi klasikinės taisyklės: priešingų sienų akučių suma lygi 7). Todėl spręskime kitaip. Kadangi matome viršutinio ir vidurinio kauliukų sieneles 2, 3, 4, 5, 6, tai susiglaudusios gali būti tik sienelės 1.

Vadinasi, viršutinio kauliuko sienelės 1 ir 6 yra priešingos. Bet visi kauliukai vienodi, todėl vidurinio kauliuko apatinė sienelė yra 6. Ji susiglaudusi su apatinio kauliuko sienele 6, todėl apačioje yra sienelė 1.
Teisingas atsakymas A.

!! Beje, iš uždavinio sąlygos galima nustatyti, kaip išsidėsčiusios kauliukų sienelės.
Vieną iš kubelių padėkime ant stalo taip, kad viršutinė sienelė būtų 6, apatinė sienelė 1, o priekinė – 5. Tada žiūrėdami į viršutinį kauliuką matome, kad dešinė sienelė bus 4, o žiūrėdami į apatinį kauliuką – kad užpakalinė sienelė bus 3. Vadinasi, lieka 2, ir tai bus kairė sienelė.
Galima klaidingai pagalvoti, kad tai prieštarauja paveikslėliui: viduriniame kauliuke nuo sienelės 2 prie sienelės 3 pereiname (žiūrint iš viršaus) prieš laikrodžio rodyklę, o padėtame ant stalo kauliuke – pagal laikrodžio rodyklę. Bet viskas atsistoja į savo vietas, kai jį apverčiame: sienelė 1 taps apatine, 6 – viršutine, o nuo sienelės 2 prie sienelės 3 eisime pagal laikrodžio rodyklę.
Taigi pavaizduotame kauliuke priešingos yra sienelės 1 ir 6, 2 ir 4, 3 ir 5. Vadinasi, šie kauliukai taip pat pagaminti neprisilaikant klasikinės taisyklės. Jei į piešinyje pavaizduotą kubelį žiūrėsime iš sienelės 6 krypties, tai sienelės 2, 3, 4, 5 eis iš eilės pagal laikrodžio rodyklę. Negalima sakyti, kad gamintojas pasirinko prastą sienelių tvarką – bent jau įsiminti ją nesunku.

M8. Ⓔ Tokio taško nėra



? Keletą kartų pabandę, įsitikiname, kad užduoties įvykdyti nepavyksta.
Renkamės atsakymą E.

?? A) Bandykime atsakymą A – pradėkime piešti nuo taško A. Atėję į K, galime sukti į kairę ir į dešinę. Jei sukame į kairę, tai per taškus E, D ateiname į tašką C. Kad ir kuriuo iš dviejų kelių eisime į tašką B, po to lieka dvi galimybės: arba grįžti kitu keliu į tašką C ir nebejudėti, arba eiti į tašką K, bet tada kelias taip pat baigiasi, ir lieka nenubrėžtas kitas kelias CB.
Jei iš K sukame į dešinę ir ateiname į B, istorija vėl kartojasi: arba nubrėžiame abu kelius BC ir CB (ir sustojame), arba iš C per D, E baigiame kelią taške K (ir lieka nenubrėžtas vienas iš gabalų BC).
B) Bandykime atsakymą B ir pradėkime iš taško B. Jei eisime į tašką C, tai toliau galima grįžti į tašką B arba eiti į tašką D.
Jeigu grįšime į B, tai toliau tenka eiti į tašką K. Jei iš K užsuksime į A, tai kelias baigsis. Jei į A neužsuksime dabar ir judėsime į E, tai daugiau į A nepateksime, ir kelias KA liks nenubrėžtas.
Jei iš C judėsime link D, tai per E patekę į tašką K vėl patiriame fiasko: jei užsuksime į A, tai nebegalėsime iš A grįžti, o jei į A neužsuksime dabar, tai ir nebegalėsime į jį užsukti.
C) Bandykime atsakymą C – pradėkime iš taško D. Jeigu eisime į E, tai vėl taške K pasukti į A negalima (nebegrįšime), o praėję link B – daugiau nebepateksime į A.
Jei iš D eisime į C, tai nuėję iki B arba grįšime kitu keliu BC ir užstrigsime, arba jei eisime link K, tai nebegalėsime grįžti į antrą kelią BC.
D) Pradėkime taške K. Užeiti į A dabar negalima (nebegrįšime), vadinasi, reikia apibėgti ratą ir grįžti į tašką K. Todėl visai vistiek, į kurią pusę judėti. Eikime į E, D, C, B. Grįžti į C negalima (užstringame), o nuėję tolyn – nebegrįžtame.
E) Taigi pagal „Kengūros“ konkurso sąlygą, kad lygiai vienas atsakymas teisingas, lieka paskutinis atsakymas – tokio taško nėra.
Renkamės atsakymą E.

! Įsitikinkime, kad iš tikrųjų nėra taško, nuo kurio pradėję galėtume nupiešti „kengūrą“. Iš tikrųjų, tas taškas negali būti A (jau įrodėme). Tas taškas negali būti tarp K ir A – jeigu pasuksime į A, tai nebeateisime į K, o jei pasuksime į K, tai niekada nebeateisime į A.

Jau įrodėme, kad tai negali būti taškas K. Bet kad ir iš kokio kito nenagrinėtų taškų pradėtume, kada nors turėsime ateiti į tašką K. Sakykime, kad į tašką K (pirmą kartą) ateiname, pavyzdžiui, „iš viršaus“ (tada „iš apačios“ kelio KE dalis prie taško K nenubrėžta). Dabar užsukti į A negalima (užstrigsime), o neužsukus – niekada nebepateksime. Vadinasi, atsakymas E vienintelis teisingas – tokio taško iš viso nėra.

!! Jeigu nebaigę piešti pateksime į tašką A, tai iš jo nebeišeisime. Vadinasi, pradėti arba baigti piešti reikia taške A. Kadangi visą piešimo procedūrą galima apsukti, tai pradėkime nuo taško A ir prieikime tašką K. Dabar likusią figūrą (atmetus KA) reikia pradėti ir baigti piešti taške K. Tarkime, kad mums tai pavyko. Tai reiškia, kad kiek kartų atėjome, pavyzdžiui, į tašką B, tai tiek kartų iš jo ir išėjome. Bet iš B išeina nelyginis kelių skaičius (būtent 3), – prieštara. Pasiskaityti apie bendrą tokių uždavinių teoriją mokiniui galima knygelėje O. Ore, „Grafai ir jų pritaikymai“, Vilnius, 1973 (serijos „Matematikos mokykla“ Nr. 5).

M9. Ⓑ 4

? Spėkime nuo vidurio – imkime atsakymą C, t. y. sakykime, kad Agnė suvalgė 5 porcijas. Bet kadangi mergaitės iš viso suvalgė 10 porcijų, tai ir Giedrė suvalgė 5 porcijas, o iš sąlygos matome, kad Agnė valgo lėčiau.
Imkime atsakymą B – Agnė suvalgė 4 porcijas. Kai Agnė suvalgo 2 porcijas, Giedrė suvalgo 3 porcijas, todėl kai Agnė suvalgo 4 porcijas, tai Giedrė suvalgo 6 porcijas. Iš viso, kaip ir turi būti, jos suvalgė 10 porcijų.
Renkamės atsakymą B.

! Pavadinkime tą laiką, per kurį Agnė suvalgo 2 porcijas (o Giedrė 3 porcijas), pavyzdžiui, pertrauka. Per pertrauką abi kartu suvalgo 5 porcijas. Vadinasi, suvalgyti 10 porcijų joms reikės 2 pertraukų, ir per jas Agnė suvalgys $2 \cdot 2 = 4$ porcijas, o Giedrė – $2 \cdot 3 = 6$ porcijas.

!! Žinoma, galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad per valandą Giedrė suvalgo x porcijų, tada Agnė suvalgo $10 - x$ porcijų. Bet per bet kurį laiką Giedrė suvalgo 3/2 karto porcijų daugiau, todėl

$$\frac{3}{2} \cdot x = 10 - x, \quad 3x = 20 - 2x, \quad 5x = 20, \quad x = 4.$$

Turime atsakymą B.

M10. Ⓓ 4, 9, 2, 5

? Išbraukę atsakyme A nurodytus skaitmenis, gauname skaičių 508, išbraukę B – skaičių 958, išbraukę C – 492, išbraukę D – 108, o išbraukę E – gauname skaičių 210. Mažiausias iš tų skaičių yra 108, todėl renkamės atsakymą D.

! Toks sprendimas geras, kai renkamės iš nurodytų atsakymų. Išspręsime uždavinį, lyg jų nežinotume.
Kadangi turime gauti triženklį skaičių, tai likęs skaičius negali prasidėti nuliu. Bet taip tikrai neatsitiks, nes po 0 eina tik 8 (ir tik išbraukę keturis skaitmenis galima gauti 0 prasidedantį skaičių). Pasistengsime padaryti likusio skaičiaus pirmą skaitmenį kuo mažesnį. Kadangi 0 padaryti neįmanoma, pasistengsime padaryti 1. Tam reikia išbraukti 3 pirmuosius skaitmenis 4, 9 ir 2. Liko skaičius 1508, iš kurio reikia išbraukti vieną skaitmenį ir pasistengti padaryti antrą skaitmenį kuo mažesnį. Aišku, kad geriausiai tam tiktų 0, ir tai padaryti įmanoma išbraukus 5. Taigi išbraukti reikia 4, 9, 2 ir 5, o mažiausias skaičius lieka 108.
Teisingas atsakymas D.

!! Jau matėme, kad išbraukus 4 skaitmenis likęs skaičius neprasidės nuliu. Todėl žodžio „triženklis“ sąlygoje galėtų ir nebūti. Bet aiškumas niekada nepakenkia.

M11. Ⓑ 12

? Tikrinkime atsakymus „nuo vidurio“. Jeigu teisingas atsakymas C, tai abi mergaitės paėmė 6 obuolius. Jei Daiva būtų paėmusi 1 obuolį, tai Rasai tektų imti 11 obuolių, – neišeina. Iš viso, jei Daiva imtų mažiau kaip 6 obuolius, tai pirmoje pintinėlėje liktų daugiau kaip 6 obuoliai – vėl neišeina. Jei Daiva imtų 6 obuolius, tai pirmoje pintinėlėje liktų 6 obuoliai, ir Rasai reikėtų imti 6 obuolius – vėl neišeina.
Tikriname atsakymą B. Tada abi jos paėmė 12 obuolių. Sakykime, Daiva paėmė 3 obuolius („keletą“), tada pirmoje pintinėlėje liko 9 obuoliai, vadinasi, Rasa ėmė 9 obuolius, – viskas išeina.
Renkamės atsakymą B.

?? Netikrinkime atsakymų, o tarkime, kad Daiva pasiėmė iš pirmos pintinėlės 2 obuolius. Tada joje liko 10 obuolių. Vadinasi, Rasa ėmė 10 obuolių, o abi iš viso paėmė 12 obuolių, todėl liko 12 obuolių. Renkamės atsakymą B.

! Likusių obuolių skaičius nepasikeistų, jei Rasa tiek pat obuolių imtų iš pirmos pintinėlės. Bet tada pirma pintinėlė pasidarytų tuščia, o antroje liktų 12 obuolių. Taigi vienintelis teisingas atsakymas – 12 obuolių, t. y. atsakymas B.

!! Galima spręsti ir su nežinomuoju. Sakykime, kad Daiva pasiėmė x obuolių. Tada pirmoje pintinėlėje liko $12 - x$ obuolių. Todėl Rasa iš antros pintinėlės ėmė $12 - x$ obuolių. Kartu jos paėmė $x + 12 - x = 12$ obuolių. Taigi atsakymas nepriklauso nuo to, kiek obuolių ėmė Daiva. Galėtų tik kilti abejonių, kas yra „keletas“. Tai tikrai ne vienas, galbūt ir ne du, galbūt ir ne 10 ar 11, bet, sakysime, 3, 4 ar 5 obuoliai tikrai atitinka tą žodį ir sąlygą apskritai.

M12. Ⓓ 33

? Tikriname atsakymą C. Tada gretų yra 10, ir jei mergaitės buvo 7-oje gretoje, tai už jų yra 8-ta, 9-ta ir 10-ta gretos. Vadinasi, mergaitės nuo galo yra 4-toje gretoje – per mažai.
Matyt, gretų turi būti daugiau – tikriname atsakymą D. Tada gretų yra 11. Jei mergaitės stovi 7-toje gretoje, tai už jų yra 8-ta, 9-ta, 10-ta ir 11-ta gretos (4 gretos). Vadinasi, nuo galo mergaitės yra 5-toje gretoje, ir viskas išeina gerai.
Renkamės atsakymą D.

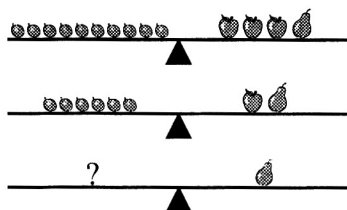
! Vėl mus norima apgauti ir įteigti mintį, kad eilių buvo $7 + 5 = 12$, t. y. teisingas atsakymas E. O iš tikrųjų, jeigu aš stoviu 7-toje gretoje, tai prieš mane yra 6 gretos, o už manęs – 4 gretos. Iš viso yra $6 + 1 + 4 = 11$ gretų, taigi į muziejų ėjo 33 mokiniai.
Teisingas atsakymas D.

M13. Ⓑ 4

? Tikriname vidurinį atsakymą C. Tada kačių-mamų yra 5, kačiukų yra bent 10, ir iš viso yra bent 15 kačių – per daug.
Tikriname „mažesnį“ atsakymą – B. Tada kačių-mamų yra 4, kačiukų $14 - 4 = 10$. Tai įmanoma: pavyzdžiui, dvi katės turi po 2 kačiukus, o kitos dvi – po 3.
Renkamės atsakymą B.

! Ankstesnį samprotavimą galima padaryti griežtą.
Jei kačių-mamų yra 5 ar daugiau, tai kačiukų yra 10 ar daugiau, ir kačių iš viso yra 15 ar daugiau, – prieštara.
Jei kačių-mamų yra 4, tai, pavyzdžiui, dvi gali turėti po 2 kačiukus, o kitos dvi – po 3.
Kadangi uždavinyje klausiama, koks didžiausias kačių-mamų skaičius, tai mažesnių skaičių tikrinti nebereikia. Teisingas uždavinio atsakymas yra 4 katės, t. y. B.
Šiaip jau kačių-mamų galėtų būti ir trys, o kačiukų 11, arba ir dvi (jei dvi – tai keletas), o kačiukų 12 (katėms visai ne per daug!).

M14. © 4



? Pradedame nuo vidurio – atsakymo C. Tada vieną kriaušę atsveria 4 slyvos. Iš antrųjų svarstyklių matome, kad obuolį atsveria 2 slyvos, o pirmos svarstyklės rodo, kad viskas gerai: iš tikrųjų 3 obuolius ir 1 kriaušę atsveria $3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 10$ slyvų.
Renkamės atsakymą C.

! Antros svarstyklės rodo, kad kriaušę ir obuolį atsveria 6 slyvos. Nuimkime nuo pirmų svarstyklių 6 slyvas, kriaušę ir obuolį. Tada 2 obuolius atsvers 4 slyvos. Tai reiškia, kad vieną obuolį atsveria 2 slyvos, ir iš (pavyzdžiui) antrų svarstyklių matome, kad kriaušę atsveria 4 slyvos.

!! Žinoma, galima sudaryti sistemą

$$\begin{cases} x + 3y = 10, \\ x + y = 6 \end{cases}$$

(x – kriaušę atsveriančių, y – obuolį atsveriančių slyvų skaičius). Tą sistemą lengva išspręsti atėmus iš pirmos lygties antrą:

$$2y = 4, \ y = 2, \ x = 6 - 2 = 4,$$

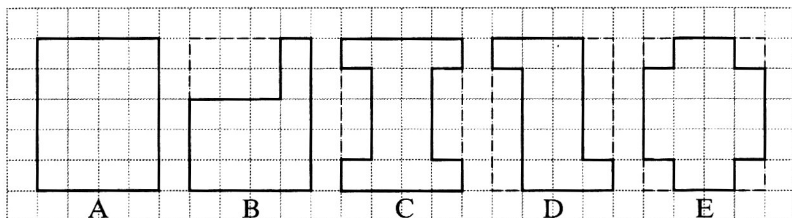
bet tai ir yra tas pats sprendimas, tik jau užrašytas ne žodžiais, o formulėmis.
Žinoma, užtenka ir vieno nežinomojo: jei kriaušę atsveria x slyvų, tai obuolį atsveria $6 - x$ slyvų, todėl

$$x + 3(6 - x) = 10, \ 2x = 8, \ x = 4.$$

Taigi vienintelis teisingas atsakymas yra 4 slyvos (t. y. atsakymas C).

M15. © C

? Spėti iš akies čia sunkoka, bet nusibraižę panašius „daržus“ languotame popieriuje lengvai suskaičiuosime tvorų ilgius: $2(5 + 4) = 18$, $3 + 4 + 5 + 1 + 2 + 3 = 18$, $2(1 + 1 + 3 + 1 + 1 + 4) = 22$, $2(1 + 1 + 4 + 3) = 18$, $2(1 + 1 + 3 + 1 + 1 + 2) = 18$.

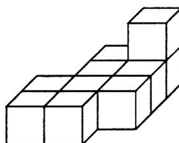
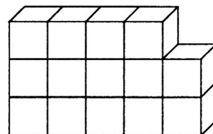


Taigi renkamės atsakymą C.

! Sklype B dvi „iškirptojo“ stačiakampio kraštines pakeitę priešingomis, gausime stačiakampį A. Kadangi nuo to tvoros ilgis nepasikeičia, tai A ir B tvorų ilgis tas pats. Lygiai tą patį galima padaryti ir su visu sklypu D (tik čia reikia atstatyti 2 „iškirptus“ stačiakampius), ir su sklypu E. Vadinasi, A, B, D, E tvoros vienodo ilgio. Kadangi pagal konkurso sąlygas tik viena tvora ilgiausia, galima būtų teigti, jog tai C.
Bet nesunku sklypo C tvoros ilgį palyginti su sklypo A tvoros ilgiu.
Iš tikrųjų, perkelkime vertikaliuosius „iškirptiems“ stačiakampiams priklausančius tvorų gabalus ant brūkšninės linijos. Tada stačiakampė tvora įgauna formą A, o dar lieka 4 „atsikišę“ horizontalūs tvoros gabaliukai. Vadinasi, tvora C ilgesnė už A, taigi ir už visų kitų sklypų tvoras.
Teisingas atsakymas C.

M16. Ⓒ 6

? Dešinysis statinys sveria 6000 gramų. Pradėkime nuo vidurinio atsakymo C. Tada nematome 6 kubelių, dešinysis statinys turi $14 + 6 = 20$ kubelių, vienas kubelis sveria $6000 : 20 = 300$ gramų, kairysis statinys sveria $10 \times 300 = 3000$ gramų, ir viskas išėjo. Renkamės atsakymą C.

! Kairysis statinys turi 10 kubelių, taigi vienas kubelis sveria $3000 : 10 = 300$ gramų. Dešinysis statinys sveria $9000 - 3000 = 6000$ gramų, todėl jis turi $6000 : 300 = 20$ kubelių. Matome 14 kubelių, vadinasi, nematome 6 kubelių.
Vienintelis teisingas uždavinio atsakymas – 6 kubelių (atsakymas C).

!! Beje, nekyla abejonių, kad 6 kubelius „paslėpti“ už dešiniojo statinio įmanoma. Būtų sunkoka pasakyti, kiek daugiausia kubelių galima už jo paslėpti. (Matome, kad už kairiojo statinio negalima paslėpti nė vieno kubelio.)

M17. Ⓑ 12

? Pradėkime nuo atsakymo C, t. y. sakykime, kad 3 vištos per 9 dienas padeda 14 kiaušinių. Tada 6 vištos per 9 dienas padeda 28 kiaušinius. Bet iš sąlygos išplaukia, kad 6 vištos per 9 dienas padeda 24 kiaušinius, – neišeina.
Kadangi gavome per daug, imkime „mažesnį“ atsakymą B. Tada 3 vištos per 9 dienas padės 12 kiaušinių, o 6 vištos per 9 dienas – 24 kiaušinius. Tada 6 vištos per 3 dienas padės $24 : 3 = 8$ kiaušinius. Taip pasakyta ir sąlygoje, vadinasi, renkamės atsakymą B.

! Kadangi 6 vištos per 3 dienas padeda 8 kiaušinius, tai 3 vištos per tas 3 dienas padeda dukart mažiau, t. y. $8 : 2 = 4$ kiaušinius. Per 9 dienas tos 3 vištos padės triskart daugiau kiaušinių, t. y. $4 \cdot 3 = 12$.
Taigi teisingas atsakymas – 12 kiaušinių (t. y. B).
Matome, kad ir vėl spręsti paprasčiau nei spėlioti.

!! Žinoma, galima skaičiuoti ir „su trupmenomis“. 1 višta per 3 dienas padeda $\frac{8}{6}$ kiaušinio, 1 višta per 1 dieną padeda $\frac{8}{18}$ kiaušinio. Todėl 3 vištos per 1 dieną padės $3 \cdot \frac{8}{18}$ kiaušinio, o 3 vištos per 9 dienas padės $9 \cdot 3 \cdot \frac{8}{18} = 3 \cdot \frac{8}{2} = 3 \cdot 4 = 12$ kiaušinių.

M18. Ⓑ 2 m 40 cm



? Čia jau nelabai paspėliosi – reikia skaičiuoti.

! Matome, kad yra $4 + 4 + 2 + 2 = 12$ „trumpų“ juostos gabaliukų ir 4 ilgesni gabalai. (Beje, čia galima pastebėti, kad 12 gabaliukų ilgių suma dalysis iš 3, o 4 gabalų ilgių suma taip pat dalysis iš 3, nes vieno gabalo ilgis (30 cm) dalijasi iš 3 – taigi atsakymai A, C ir E iš karto atkrinta.) Vadinasi, bendras juostos ilgis yra $12 \cdot 10 + 4 \cdot 30 = 240$ (cm).
Žinoma, galima skaičiuoti ir kiek kitaip: juostą sudaro du „ilgi“ stačiakampiai ir du kvadratai. Todėl juostos ilgis lygus $2(2 \cdot 30 + 2 \cdot 10) + 2 \cdot 40 = 240$ (cm).
Teisingas atsakymas B.

M19. Ⓑ 24

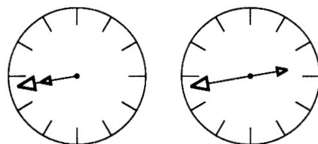
? Vėl mus bando apgauti – siūlo laiką keturgubinti ir nurodyti atsakymą A.
Sakykime, kad kvadratinės aikštės kraštinė yra 1 km. Tada per 12 minučių nueiname 4 km, o 1 km nueiname per 3 minutes (h-hmm..., truputį per greitai – na ką gi, važiuokime dviračiu, uždaviniui juk vis tiek!). Mažosios aikštės plotas 1 km^2. Todėl didžiosios aikštės plotas yra 4 km^2, o jos

kraštinė 2 km. Vadinasi, aikštės perimetras lygus $2 \cdot 4 = 8$ kilometrai, ir juos nueisime per $3 \cdot 8 = 24$ minutes.
Renkamės atsakymą B.

! Mūsų spėjimas – beveik sprendimas, tik silpna jo vieta, kad sąlygoje visai neteigiama, kad aikštės kraštinės ilgis yra 1 km. Bet tai nedidelis sunkumas. Pažymėkime aikštės kraštinę a. Tada jos plotas a^2, perimetras $4a$. Didesnės aikštės plotas $4a^2$, todėl jo kraštinė $2a$, o perimetras $8a$ – dvigubai didesnis. Taigi jai apeiti ir laiko reikės dvigubai daugiau.

!! Beje, nesunku „pataisyti“ ir spėjimą, kad jis virstų tiksliu sprendimu. Aikštės ilgį galima matuoti ne tik kilometrais, bet ir jardais, ljė, mujuniais (tai mumbojumbo genties ilgio vienetas), ir kuo tik nori. Matematikai mėgsta ilgį matuoti tararabumbijomis (trb; kaip paslaptį pasakysime, kad tararabumbija yra aikštės mažesnės kraštinės ilgis). Taigi mažosios aikštės perimetras yra 4 trb, o plotas 1 trb^2. Didesnės aikštės plotas 4 trb^2, todėl jo kraštinė 2 trb, o perimetras 8 trb. Per 12 minučių nueiname 4 trb, todėl 8 trb įveikiame per 24 minutes.
Dabar matome, kad iš esmės visi 3 sprendimai niekuo nesiskiria. O jeigu taip, tai geriau griežtesni antras ir trečias – juk jie kainuoja tiek pat vargo.
Teisingas atsakymas B.

M20. Ⓒ Šešias valandas



? Iš piešinių matyti, kad Sigutė išėjo tarp 8:40 ir 8:45, o grįžo tarp 14:40 ir 14:45. Vadinasi, jos nebuvo namie mažiausiai 5 val. 55 minutes, o daugiausiai 6 val. 05 minutes. Taigi tinka tik atsakymas C.

Galima galvoti ir taip. Laiką visiškai nusako valandinė rodyklės padėtis (minutinė tik padeda „matyti“ laiką tiksliau). Piešiniuose matome, kad valandinė rodyklė nuėjo lygiai 6 valandinius tarpukus, vadinasi, Sigutės nebuvo namie lygiai 6 valandas.

Įdomus ir toks sprendimas. Pasukime brėžinį (su visu lapu) pagal laikrodžio rodyklę taip, kad rodyklės eitų vertikaliai (ir nekreipkime dėmesio į valandinius brūkšnelius). Tada „viršutinis“ laikrodis rodys lygiai 12:00, o apatinis – lygiai 18:00. Vadinasi, laikrodis nuo vieno momento iki kito ėjo 6 valandas.

Tą patį sprendimą galima paaiškinti ir taip. „Tikro“ laikrodžio ciferblatą (bent jau mintyse) pasukime taip, kad 12 atsidurtų lygiai ties minutine rodykle (laikrodis „nežino“, kad jo ciferblatas pasuktas). Tada kairiame piešinyje laikrodis rodo 12:00, o dešiniame – 18:00.

?? Piešiniu remtis griežtai sprendžiant negalima – o gal ten kas nors pavaizduota ne taip. Remkimės tik sąlyga. Kadangi 8:00 minutinė rodyklė pradeda vytis valandinę, 8:30 dar nepasivijus, o 9:00 jau pralenkus, tai laikrodžio rodyklės sutampa tarp 8:30 ir 9:00. 14:00 minutinė rodyklė pradeda vytis valandinę, kampas tarp jų mažėja, po to jos sutampa, tada kampas tarp jų didėja, ir 14:30 lygus $3\frac{1}{2}$ valandinio „tarpelio“. Bet 15:00 atstumas tarp jų jau 9 tarpeliai, taigi atstumas 6 tarpeliai (tada jos ir sudaro tiesę) yra tarp 14:30 ir 15:00. Laikas tarp tų momentų didesnis už $14{:}30 - 9{:}00 = 5{:}30$, bet mažesnis už $15{:}00 - 8{:}30 = 6{:}30$, todėl tinka tik atsakymas C.

! Galima tiksliai nustatyti momentus, kada Sigutė išėjo iš namų ir kada grįžo. Kadangi 12:00 rodyklės sutampa, o 13:00 tarp rodyklių yra (einant nuo valandinės rodyklės prie minutinės laikrodžio rodyklės kryptimi) 11 valandinių tarpukų, tai 1 tarpukas tarp jų pasidaro per $\frac{1}{11}$ h. Kad vėl rodyklės sutaptų, tarp jų turi būti 12 tarpukų, o tai įvyks po $\frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$ h. Vadinasi, kas $1\frac{1}{11}$ h rodyklės sutampa, vadinasi, jos iki pusiaudienio sutampa likus $1\frac{1}{11}$ h, $2\frac{2}{11}$ h, $3\frac{3}{11}$ h. Taigi Sigutė iš namų išėjo $8\frac{8}{11}$ val. Panašiai 6 tarpukai tarp rodyklių nuo to momento, kai jos sutampa, bus po $\frac{6}{11}$ h, ir vėl kas $1\frac{1}{11}$ h. Taigi po vidurdienio tai bus laiko momentais $12\frac{6}{11}$ val., $13\frac{7}{11}$ val., $14\frac{8}{11}$ val. Vadinasi, Sigutė grįžo namo $14\frac{8}{11}$ val. Namie jos nebuvo $14\frac{8}{11} - 8\frac{8}{11} = 6$ h, t. y. teisingas atsakymas C.

!! Pateiksime sprendimą „be trupmenų". Imkime laiko momentą 12:00. Laiką, per kurį minutinė rodyklė aplenkia valandinę puse apskritimo, pavadinkime tarpsniu. Per du tarpsnius minutinė rodyklė aplenks valandinę visu apskritimu, t. y. rodyklės vėl sutaps. Tai įvyks vėliau kaip 13:05 (nes 13:00 minutinė rodyklė dar nepasivijusi valandinės, ir net 13:05 ji nebus pasivijus) ir anksčiau negu 13:10 (nes 10 minučių po pirmos minutinė rodyklė bus ties skaičiumi 2, o valandinė dar nebus iki jo atėjus). Vadinasi, du tarpsniai yra daugiau kaip 65 minutės, bet mažiau kaip 70 minučių, o vienas tarpsnis yra didesnis už 30 minučių, bet mažesnis už 35 minutes.
Dabar suskaičiuokime, kiek tarpsnių Sigutės nebuvo namie. 12:00 rodyklės sutapo, todėl jos sutapo prieš 2 tarpsnius (prieš 65–70 minučių, t. y. tarp 10:50 ir 10:55), prieš 4 tarpsnius (prieš 130–140 minučių, t. y. tarp 9:40 ir 9:50), prieš 6 tarpsnius (195–210 minučių, t. y. tarp 8:30 ir 8:45). Kadangi prieš 8 tarpsnius dar nebuvo 8 valandos, tai Sigutė iš namų išėjo 6 tarpsniai prieš vidurdienį.
Beje, dar pratęskime šį samprotavimą. Gauname, kad rodyklės sutapo prieš 8 tarpsnius (prieš 260–280 minučių, t. y. tarp 7:20 ir 7:40), prieš 10 tarpsnių (tarp 6:10 ir 6:35, o prieš 11 tarpsnių (tarp 5:25 ir 6:05 jos priešpriešės. Bet mes puikiai atsimename, kad lygiai 6:00 laikrodžio rodyklės priešpriešės, vadinasi, 11 tarpsnių – tai 6 valandos.
Dabar suskaičiuokime, kiek tarpsnių po vidudienio Sigutės nebuvo namie. Kadangi 2 tarpsniai *iki* 18:00 yra tarp 14:50 ir 14:55, 4 tarpsniai *iki* 18:00 yra tarp 15:40 ir 15:50, 6 tarpsniai – tarp 14:30 ir 14:45, tai Sigutės grįžimo namo momentas ir buvo 6 tarpsniai iki 18:00, arba 5 tarpsniai nuo 12:00. Iš viso Sigutės nebuvo namie 11 tarpsnių, o tai yra lygiai 6 valandos.

!!! Sigutės nebuvo namie nelyginį tarpsnių skaičių. Bet jos nebuvo namie mažiausiai nuo 9:00 iki 14:00, daugiausiai nuo 8:00 iki 15:00, t. y. 5–7 valandas. 11 tarpsnių yra 6 valandos, 13 tarpsnių – daugiau kaip 7 valandos, 9 tarpsniai – mažiau kaip 5 valandos. Vadinasi, jos tikrai nebuvo 11 tarpsnių, t. y. lygiai 6 valandas.

M21. Ⓒ 6

? Pradedame spėti nuo vidurio. Kadangi $6+3=9$ tikrai yra trimis mažiau už $2\cdot 6=12$, tai renkamės atsakymą C.

! Skaičius, jo pusė ir 3 yra dvigubas skaičius. Vadinasi, jo pusė ir 3 yra pats tas skaičius. Todėl 3 yra jo pusė, taigi ieškomas skaičius yra 6.

!! Žinoma, galima sudaryti lygtį:

$$x+\frac{1}{2}x+3=2x.$$

Beje, ją spręsdami įžiūrime tą patį samprotavimą, tik užrašytą lygtimis:

$$\frac{1}{2}x+3=x,$$

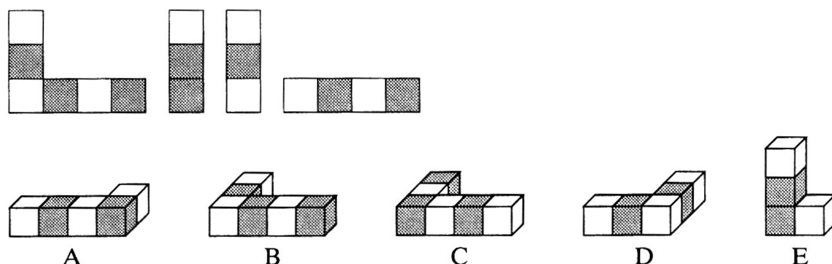
$$\frac{x}{2}=3,$$

$$x=6.$$

Vienintelis atsakymas yra 6 (t. y. C).

M22. Ⓑ

? Čia beveik visiškai vis tiek, nuo ko pradėti spėti. Iš pirmo paveikslėlio matome, kad konstrukcijos galai yra skirtingų spalvų kubeliai, todėl netinka atsakymai A, D ir E. Iš to paties pirmo paveikslėlio matome, kad konstrukcijos kampinis kubelis baltas, o atsakyme C taip nėra. Renkamės atsakymą B.



! Įdomu, kad atmesti 4 atsakymus užteko pirmo paveikslėlio. Griežtai sprendžiant uždavinį, dar reikia įsitikinti, kad žiūrint į konstrukciją B iš įvairių pusių tikrai galima pamatyti visus keturis paveikslėlius. Ir iš tikrųjų, pirmą paveikslėlį matysime, jei į B žiūrėsime iš viršaus; antrą paveikslėlį. matysime, jei į B žiūrėsime iš dešinės; trečią paveikslėlį matysime, jei į B žiūrėsime iš kairės (abu kartus prieš tai pavertę B ir padarę 3 vienetų kraštinę vertikalią); ketvirtą paveikslėlį matysime žiūrėdami į B iš priekio.

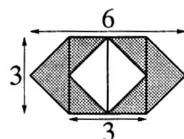
Beje, jei į B žiūrėtume iš apačios ar iš užpakalio, naujų paveikslėlių negautume.

!! Žinoma, galima atsakymus perrinkti ir kitaip. A netinka, nes iš niekur nepamatysime stačiakampio 1×3. D ir E netinka, nes iš niekur nepamatysime stačiakampio 1×4. C netinka, nes konstrukcijos kampinis kubelis turi būti baltas. Lieka įsitikinti, kad konstrukcija B tinka.

M23. Ⓑ 9

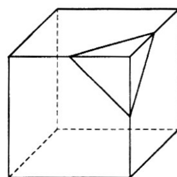
? Iš karto matome, kad netinka atsakymas E – pilno stačiakampio su kraštinėmis 3 ir 6 plotas būtų 18. Panašu, kad išmesta dalis yra apie pusę ploto, taigi renkamės atsakymą 9, t. y. B.

! Plotus galima suskaičiuoti. Keturių išmestų iš stačiakampio kampinių trikampukų bendras plotas yra $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. Kvadrato plotas lygus įstrižainių sandaugos pusei: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Vadinasi, užtušuotos dalies plotas lygus $18 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 9$.

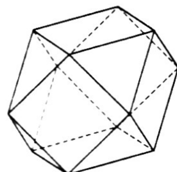


!! Per kvadratinės „skylės“ viršūnes išveskime 3 vertikalias linijas. Jos atkerta iš kairės ir dešinės po trikampį. Tuos trikampius įstūmę į skylę, ją kaip tik užpildome. Gauto kvadrato plotas lygus $3 \cdot 3 = 9$.

M24. Ⓒ 12



? Ir šiame uždavinyje bandoma sprendėją apgauti. Kadangi nupjovus vieną viršūnę atsirado trys naujos, tai viršūnių skaičius padidėjo 2. Bet kubo viršūnių yra 8, tai peršasi atsakymas, kad turėsime $8 \cdot 2 = 16$ naujų viršūnių, o iš viso $8 + 16 = 24$ viršūnes. Taip ir būtų, jeigu pjautume per taškus, nutolusius nuo viršūnės, sakysime, per 5 cm. Iš tikrųjų, kadangi pjaunama per briaunos vidurį, tai briaunoje bus tik viena viršūnė, o taip skaičiuodami kiekvieną viršūnę įskaitome 2 kartus, todėl teisingas atsakymas 12, t. y. C.



! Pjaunant kaip nurodyta sąlygoje, kiekviena viršūnė bus kubo briaunos vidury-je. Kadangi briaunų yra 12 (4 viršutiniame pagrinde, 4 apatiniame pagrinde, 4 vertikalios), tai ir viršūnių bus 12.

Gautas briaunainis pavaizduotas paveikslėlyje.

BIČIULIS (V ir VI klasės)

B1. Ⓒ 16

? Kadangi atsakymai „surikiuoti“, tai spėlioti geriausia nuo vidurio. Jei mergaičių 16, tai berniukų 13, ir skirtumas $16 - 13 = 3$. Renkamės atsakymą C.

! Kiti atsakymai netinka: A ir B netinka, nes mergaičių turi būti daugiau kaip pusė, t. y. ne mažiau kaip 15. Atsakymas D netinka, nes tada berniukų 10, ir skirtumas $19 - 10 = 9$. Atsakymas E netinka, nes tada berniukų iš viso nėra (be to, ir skirtumas $29 - 0 = 29$).

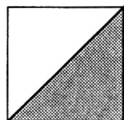
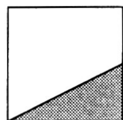
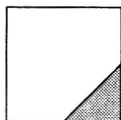
!! Surikiuokime klasę mišriomis poromis, tada pagal sąlygą 3 mergaitės liks be poros. Atmetę tas 3 mergaites, gausime $(29 - 3) : 2 = 13$ pilnų porų. Vadinasi, mergaičių yra $3 + 13 = 16$.
Galima sudaryti ir lygtį. Jeigu mergaičių yra x, tai berniukų $x - 3$. Turime

$$x + x - 3 = 29,\ 2x = 32,\ x = 16.$$

B2. Ⓔ 5

? Čia vargu ar ką atspėsi. Beje, vėl mums peršamas atsakymas $4 - 1 = 3$. Taip ir būtų, jei, sakysime, kvadrato kampukus nuspalvintume, o vieną nukirpę klaustume, kiek liko nuspalvintų kampų.
O iš tikrųjų čia reikalaujama atsakyti, kiek kampų turės gautoji figūra. Nukirpus vienas kampas dingo, bet atsirado du nauji kampai, taigi dabar turime 5 kampus, ir renkamės atsakymą E.

! Pasižiūrėkime, kas būtų, jei nekreiptume dėmesio į žodžių „kvadratą“ ir „mažą kampuką“ supriešinimą. Uždavinys virstų tokiu:
Nuo kvadrato nukirpome vieną kampą. Kiek kampų turi likusi figūra?
Aišku, kad jeigu kirptume per du kampus (įstrižaine), tai liktų trikampis. Jeigu kirptume per vieną kampą, tai liktų keturkampis. Jeigu pjūvis neis per kampus, tai liks penkiakampis. Matome, kad atsakymas į mūsų klausimą būtų nevienareikšmis.

Vadinasi, žodį „kampuką“ ir reikia suprasti taip, kad pjūvis neina per kvadrato kampus. Taigi teisingas atsakymas – 5.

B3. Ⓓ $585 \cdot 3 \cdot 5$

? Spėjame, kad dalyti šitame uždavinyje tikrai nereikia, taigi lieka atsakymai D ir E. Bet kiekvieną pelę supa 5 peliukai, taigi 3 peles supa $3 \cdot 5$ peliukai. Renkamės atsakymą D.

! Pradėkime skaičiuoti nuo galo. Vieną pelę supa 5 peliukai, todėl 3 peles supa $3 \cdot 5$ peliukų. Tiek jų ir gyvena vienoje kišenėje. Todėl visose kišenėse gyvena $585 \cdot 3 \cdot 5$ peliukai.

!! Atkreipkite dėmesį į tai, kad uždavinyje skiriamos pelės ir peliukai. Beje, jeigu būtų paklausta, kiek pelių gyvena milžino striukėje, atsakyti būtų sunku: jeigu peliukai taip pat yra pelės, tai vienoje kišenėje 3 pelės turėtų 15 peliukų, iš viso kišenėje pelių būtų 18, o striukėje gyventų $585 \cdot 18 = 10530$ pelių; jeigu peliukų nelaikysime pelėmis, tai vienoje kišenėje gyventų 3 pelės, o striukėje gyventų $585 \cdot 3 = 1755$ pelės.
Beje, jeigu sąlygoje nebūtų žodžio „jos“, tai teisingas atsakymas būtų F.

B4. Ⓔ 402

? Kadangi skaičiai išrikiuoti (mažėjimo tvarka), tai spėti geriausia nuo vidurio. Jei didžiausias penketuko skaičius 471, tai sumą gauname $467 + 468 + 469 + 470 + 471 = 2345$, kuri yra daug per didelė. Todėl bandome 402. Tada $398 + 399 + 400 + 401 + 402 = 2000$, taigi renkamės atsakymą E.

?? Spėti galima ir pagal paskutinį skaitmenį. Atveju A paskutinis skaitmuo bus kaip ir skaičiaus $6+7+8+9+0=30$, t. y. 0. Atveju B paskutinis skaitmuo sutaps su $1+2+3+4+5=15$ paskutiniu skaitmeniu, t. y. bus 5. Atveju C kiekvieno penketuko skaičiaus paskutinis skaitmuo padidės vienetu palyginti su A, t. y. penketuko sumos galūnė bus 5 didesnė už sumos A galūnę ir todėl bus 5. Atveju D (palyginti su C) skaičių paskutiniai skaitmenys pasislinks dvejetu, taigi sumos galūnė bus 5. Pagaliau atveju E skaičių paskutiniai skaitmenys sumažės vienetu palyginti su D, ir suma baigsis 0.
Taigi tenka rinktis iš atsakymų A ir E. Bet atsakymas A aiškiai per didelis: $486 \cdot 5 > 2000$. Lieka atsakymas E.

! Kadangi 5 skaičių suma lygi 2000, tai tų skaičių vidurkis yra 400. Kadangi pirmų keturių atsakymų kiekvienas penketuko skaičius didesnis už 400, tai ir vidurkis didesnis. Lieka atsakymas E, kurį reikia patikrinti. Čia vidurkis tikrai lygus 400, nes $(398+402)+(399+401)+400=2\cdot 400+2\cdot 400+400=5\cdot 400$.

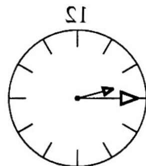
!! Penkių iš eilės einančių skaičių vidurkis sutampa su viduriniuoju skaičiumi, nes $x-2+x-1+x+x+1+x+2=5x$. Todėl vidurinis penketuko skaičius bus $2000:5=400$, o didžiausias penketuko skaičius – dvejetu didesnis. Taigi teisingas tik atsakymas E.

B5. Ⓓ 80

? Čia stengiamasi įpiršti mums mintį, kad procentus reikia dalyti pusiau. Tada pasirinktume neteisingą atsakymą 40. Iš tikrųjų vandens dalis limonade nesikeičia, taigi teisingas atsakymas D.

! Skaičiuoti ką nors čia visiškai beprasmiška. Žinoma, galima būtų suskaičiuoti vandens ar „sausųjų“ medžiagų (t. y. nevandens) kiekį pusėje litro, bet to visiškai neklausiama. Ir kadangi procentai išreiškia vandens dalį limonade, tai jie nesikeičia.

B6. Ⓔ 9:45



? Pažiūrėję į piešinį prieš šviesą iš kitos lapo pusės, iš karto pamatytume teisingą laiką – be penkiolikos dešimt. Renkamės atsakymą E.

?? Padeda ir veidrodėlis – pridėję jį prie veidrodžio iš karto matome teisingą laiką (ir teisingą skaičių 12).

! Simetriškai vertikaliosios ašies atžvilgiu „permetę“ mintyse (ar nupiešę) rodykles, gauname, kad minutinė rodyklė yra „ties 9“, o valandinė „tarp 9 ir 10“. Tai ir reiškia laiką be penkiolikos minučių dešimt.

B7. Ⓓ 4 dvejetų ir 3 penketų

? Atsakymuose dvejetų skaičius yra nuo 2 iki 4, o penketų – nuo 3 iki 5. Todėl „vidutinis“ yra atsakymas C – 3 dvejetai ir 4 penketai. Nuo jo ir pradedame tikrinti. Kadangi $2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=10\cdot 10\cdot 10\cdot 5=5000$ yra perdaug. Tai reiškia, kad atsakymas E juo labiau netiks. Bandome atsakymą D: $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5=10\cdot 10\cdot 10\cdot 2=2000$. Renkamės atsakymą D.

?? Gavę atsakyme C 5000 matome, kad užtenka 5 pakeisti į 2. Tai reiškia, kad reikia vietoj 3 dvejetų ir 4 penketų imti 4 dvejetus ir 3 penketus.

! Išskaidome: $2000=2\cdot 1000=2\cdot 2\cdot 500=2\cdot 2\cdot 2\cdot 250=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 125=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 25=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5$. Matome, kad 2000 yra 4 dvejetų ir 3 penketų sandauga.

!! Kadangi 10 gauname sudauginę 2 ir 5, tai 1000 gauti reikia 3 dvejetų ir 3 penketų, o 2000 – 4 dvejetų ir 3 penketų.

B8. Žr. M18 uždavinio sprendimą.

B9. Ⓓ 3 valandas

? Kadangi jau už 1 šokoladuką galima važinėtis 2 valandas, tai atsakymai A, B ir C atkrenta. Už 4 ledinukus galima važinėtis dar 1 valandą, taigi teisingas atsakymas C.

! Faktiškai nieko mes nespėliojome, o suskaičiavome laiką. Žinoma, skaičiuoti galima negudraujant: kadangi 2 šokoladukai atitinka 4 valandas, tai 1 šokoladukas – 2 valandas. Kadangi 12 ledinukų atitinka 3 valandas, tai 1 ledinukas atitinka $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ h. Vadinasi, už 1 šokoladuką ir 4 ledinukus galima važinėtis $2+4\cdot\frac{1}{4} = 3$ valandas. Žinoma, šis būdas prastesnis už spėjime pateiktą sprendimą.

!! Neblogas būdas padauginti Miko duoklę iš tiek, kad skaičiuoti būtų ypač lengva. Kadangi sąlygoje kalbama apie 2 šokoladukus, tai verta dauginti iš 2. Bet sąlygoje kalbama ir apie 12 ledinukų, todėl verta dauginti ir iš 3. Vadinasi, dauginame iš 6 ir sakome: jeigu Mikas duotų Karoliui 6 kartus daugiau – 6 šokoladukus ir 24 ledinukus, tai jis galėtų važinėtis $12+6=18$ valandų. O dabar jis tegali važinėtis 3 valandas.

B10. Žr. M10 uždavinio sprendimą.

B11. Ⓑ 7

? Atspėti čia vargu ar ką galima – reikia kaip nors tuos skaičius suskaičiuoti.
Išrašykime skaičiaus 7 kartotinius (jų mažiau nei dvejeto kartotinių):

$$7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, \ldots$$

Išrenkame iš jų dviženklius, kurie dalijasi iš 2: $14, 28, 42, 56, 70, 84, 98$. Taigi iš 2 ir iš 7 dalijasi 7 dviženkliai skaičiai, ir teisingas atsakymas B.

! Kadangi 2 ir 7 neturi bendrų daliklių, tai mums reikia dviženklių skaičiaus 14 kartotinių. Tai skaičiai $14, 28, 42, 56, 70, 84, 98$.

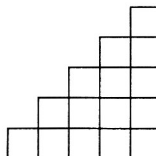
!! Dabar skaičiuokime neišrašę skaičiaus 14 kartotinių. Skaičiaus 14 kartotiniai kartojasi kas 14, todėl iki skaičiaus 99 jų bus tik 7, nes dalydami 99 iš 14 gauname 7 (su liekana 1).

B12. Ⓔ E

? Kadangi atsakymai pagal didumą neišrikiuoti, tai pradėti tikrinti galima nuo bet kurio atsakymo. A nėra didžiausias, nes $A-1=E-5$, $E=A+4$, ir E didesnis. E didesnis ir už B, nes $E-5=B+2$, $E=B+7$. E didesnis ir už C, nes $E-5=C-3$, $E=C+2$. E didesnis ir už D, nes $E-5=D+4$, $E=D+9$. Taigi skaičius E yra didžiausias, ir renkamės atsakymą E.

! Kad duotoje lygybėje minusai ir pliusai „nemirgėtų“, pridėkime prie visų lygių skaičių tiek, kad minusų neliktų. Geriausia pridėti 5, tada $A+4=B+7=C+2=D+9=E$. Iš šios lygybės visiškai aišku, kad E didesnis už kiekvieną kitą iš skaičių.

B13. Ⓓ 55



? Suskaičiuokime pavaizduotos figūros langelius eilėmis: $1+2+3+4+5=15$. Kadangi 10 kvadratėlių aukščio figūra turės dar 5 naujas eiles, o tos eilės bus ilgesnės kaip 5, tai kvadratėlių bus daugiau kaip $15+5\cdot5=40$, ir atsakymai A, B ir C netinka. Netinka ir atsakymas E, nes langelių bus mažiau nei dešimtyje eilių po 10. Renkamės atsakymą D.

! Žinoma, paprasčiausia skaičiuoti. Viršutinėje eilėje bus 1 kvadratėlis, antroje – 2, ..., devintoje – 9, dešimtoje – 10 kvadratėlių. Iš viso bus $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5+10=55$ kvadratėliai.
Teisingas atsakymas D.

B14. Ⓑ 166 h 40 min

? Jei per minutę parašome 100 raidžių, tai per 1 valandą – 6 000 raidžių, per 160 val. – 960 000 raidžių, per 166 valandas – 996 000 raidžių. Vadinasi, atsakymai A, C ir D atkrinta. Per 200 valandų parašome 1 200 000 raidžių, todėl atkrinta ir atsakymas E. Renkamės atsakymą B.

! Vis dėlto paprasčiau skaičiuoti, negu „artėti" prie miljono. 1 000 000 už 100 daugiau 10000 kartų, tai prireiks 10 000 minučių, o tai yra $10\,000/60 = 1\,000/6 = 166\frac{4}{6}$ valandos, t. y. 166 h 40 min. Teisingas atsakymas B.

B15. Žr. M15 uždavinio sprendimą.

B16. Ⓑ Padidėtų 5 vienetais

? Spėti galima pasiėmus konkretų pavyzdį. Imkime, pavyzdžiui, $a = 20$, $b = 5$. Jų skirtumas lygus 15. Tada a padidinę 3 vienetais, gausime 23, o b sumažinę 2 vienetais – gausime 3. Tada naujųjų skaičių skirtumas lygus $23 - 3 = 20$, taigi padidėja 5 vienetais. Renkamės atsakymą B.

! Nesunku ir suskaičiuoti. Duota, kad $a - b = 15$. Skaičių $a + 3$ ir $a - 2$ skirtumas lygus $(a + 3) - (b - 2) = a - b + 5 = 20$, taigi padidėja 5 vienetais nepriklausomai nuo a ir nuo b.

!! Iš sprendimo matome, kad skirtumas visada padidės 5, nesvarbu, ar iš pradžių jis lygus 15, ar kitam skaičiui.

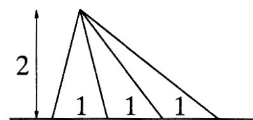
B17. Ⓓ 420

? Tikrinkime atsakymus. Kadangi jie išrikiuoti, pradėkime nuo vidurio, skaičiaus 210. Kadangi A lankosi klube kas dieną, tai jis bus, B – kas antrą dieną, jis irgi bus, C – kas trečią dieną jis irgi bus. D bus kas ketvirtą dieną, taigi bus 200, 204, 208, 212 dieną, ir 210 dieną jis „prašoks". O štai skaičiaus 420 jis (kaip ir visi ankstesnieji) neprašoks – 420 dalijasi iš 4. „Neprašoks" tos dienos ir D, E, F ir G, nes 420 dalijasi iš 5, iš 6 ir iš 7. Renkamės atsakymą D.

! Iš tikrųjų reikia rasti skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 mažiausiąjį bendrąjį kartotinį. Jis lygus $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Vadinasi, teisingas atsakymas D.

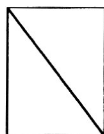
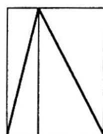
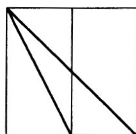
!! Sąlygą įmanoma suprasti ir taip, kad klausiama, po kelių dienų jie bus visi klube. Atsakymas būtų toks: po 420, 840, ..., 5040, ... dienų (t. y. po $420k$, $k \in \boldsymbol{N}$, dienų). Bet kadangi „Kengūros" konkurso sąlygos garantuoja, kad tik vienas iš atsakymų teisingas, tai sąlygą reikia suprasti taip: *Kaip greitai jie visi vėl susirinks klube*?

B18. Ⓔ 10



? Ir šiame uždavinyje spėti nėra ką – reikia skaičiuoti. Matome 3 trikampius, kurių pagrindas 1; galime įžiūrėti 2 trikampius, kurių pagrindas 2; pagaliau, yra vienas trikampis, kurio pagrindas 3. Kiekvieno mažojo trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$, todėl visų trikampių plotų suma lygi $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 10$. Renkamės atsakymą E.

! Spėjime naudojamasi trikampio ploto formule: trikampio plotas lygus pusei pagrindo ir aukštinės sandaugos. Tai tas pat, kas pasakyti: trikampio plotas lygus pusei ploto stačiakampio, kurį galima pastatyti ant trikampio pagrindo ir kurio šoninės kraštinės lygios aukštinei. Įrodysime šį teiginį.

Stačiojo trikampio atveju iš piešinio tai aišku iš karto; smailiojo trikampio atveju jo plotas sudaro pusę didžiojo stačiakampio ploto; bukojo trikampio atveju plotą randame kaip dviejų stačiųjų trikampių plotų skirtumą, kuris lygus pusei didžiojo ir kairiojo stačiakampio plotų skirtumo, t. y. dešiniojo stačiakampio ploto pusei.

B19. Ⓐ 30

? Ir vėl nėra ką spėti – reikia skaičiuoti.

! Kengūrai įveikti 180 metrų reikia 60 sekundžių. Kengūriukui įveikti 180 metrų reikia 90 sekundžių. Todėl kengūra sūnaus lauks 30 sekundžių.
Teisingas atsakymas A.

B20. Ⓑ 0,1

? Spėti neverta, nors aišku, kad dalys ir procentai bus išreiškiami 10 laipsniais, todėl atsakymai C ir E iš karto netinka.

! Skaičius 2 sudaro skaičiaus 2000 tiek pat procentų, kiek ir skaičius 1 sudaro skaičiaus 1000 procentų, o tai yra tiek pat procentų, kiek 0,1 sudaro skaičiaus 100 procentų, t. y. 0,1 procento.
Teisingas atsakymas B.

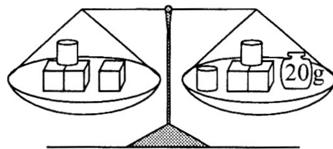
!! Pagal taisyklę tai yra $\frac{2}{2000} \cdot 100 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ procento.

B21. Ⓓ 4

? Kiekvienoje grupėje gali būti 6 vaikai (96 : 6 = 16); 7 būti negalės, nes 96 nesidalija iš 7; gali būti 8 vaikai (96 : 8 = 12); negali būti 9, 10, 11 vaikų; gali būti 12 vaikų (96 : 12 = 8); negali būti 13, 14, 15 vaikų; gali būti 16 vaikų (96 : 16 = 6); negali būti 17, 18, 19 vaikų. Vadinasi, yra 4 būdai – suskirstyti vaikus į grupes po 6, po 8, po 12 arba po 16 vaikų. Renkamės atsakymą D.

! „Spėjimas“ yra visai griežtas sprendimas, nes perrinkome visas grupes nuo 6 iki 19 vaikų. Iš tikrųjų uždavinį galima pakeisti klausimu, kiek yra skaičiaus 96 daliklių tarp skaičių nuo 6 iki 19. Kadangi $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, tai dalikliai gali būti tokie: jei 3 daliklio skaidinyje nėra, tai skaičiai $2 \cdot 2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, o jei 3 yra, tai skaičiai $3 \cdot 2$, $3 \cdot 2 \cdot 2$. Vadinasi, iš viso yra 4 dalikliai nuo 6 iki 19. Taigi yra 4 būdai suskirstyti vaikus į norimas grupes.
Teisingas atsakymas D.

B22. Ⓓ 70



? Kadangi masės atsakymuose „išrikiuotos“, pradėkime nuo vidurio. Jei kubelis svertų 60 g, tai kairėje būtų 180 g plius ritinėlis, o dešinėje – 140 g plius 2 ritinėliai. Kadangi svarstyklės pusiausviros, tai ritinėlis svertų 40 g. Tada visi kubeliai ir ritinėliai svertų $5 \cdot 60 + 3 \cdot 40 = 420$ gramų.

Eikime į „viršų“. Jei kubelis svertų 70 g, tai kairėje būtų 210 g plius ritinėlis, o dešinėje – 160 g plius du ritinėliai. Tada ritinėlis svertų 50 g. Iš viso kubeliai ir ritinėliai svertų $5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 = 500$ gramų, o tiek ir nurodyta.
Renkamės atsakymą D.

! Iš paveikslo matome, kad svarstyklės liks pusiausviros, jei iš lėkščių nuimsime po „piramidę“ iš dviejų kubelių ir vieno ritinėlio. Vadinasi, kubelis sunkesnis už ritinėlį 20 g. Kadangi 5 kubeliai ir 3 ritinėliai sveria 500 g, tai 5 + 3 kubeliai sveria 560 g. Todėl vienas kubelis sveria 560 : 8 = 70 gramų.

!! Žinoma, galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad ritinėlis sveria x gramų. Numetus po „piramidę“, aišku, kad kubelis sveria $x + 20$ gramų. Kadangi iš viso yra 5 kubeliai ir 3 ritinėliai, sudarome lygtį: $5(x+20)+3x = 500$. Ją išsprendžiame: $5x + 100 + 3x = 500$, $8x = 400$, $x = 50$. Vadinasi, ritinėlis sveria 50 g, o kubelis – 70 g.

Patikrinę matome, kad visos uždavinio sąlygos patenkintos.
Vargu ar galima tokį sprendimo būdą laikyti geresniu.

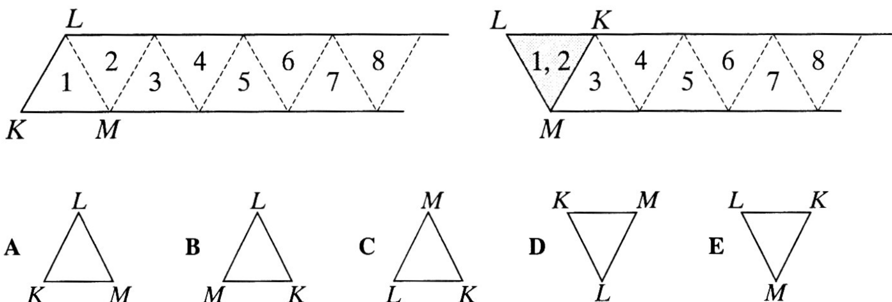
!!! Galima sudaryti ir lygčių sistemą.
Sakykime, kad ritinėlis sveria x gramų, o kubelis y gramų. Kadangi svarstyklės pusiausviros, tai $3x + y = 2x + 2y + 20$. Kadangi 5 kubelių ir trijų ritinėlių masė lygi 500 g, tai $5x + 3y = 500$. Turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x = y + 20, \\ 5x + 3y = 500. \end{cases}$$

Ją sprendžiame: $5(y + 20) + 3y = 500$, $5y + 100 + 3y = 500$, $8y = 400$, $y = 50$. Todėl $x = y + 20 = 50 + 20 = 70$.

B23. Ⓓ

? Spėlioti neverta.



! Pradinė padėtis pavaizduota atsakyme A. Po pirmo lenkimo gaunama padėtis pavaizduota atsakyme E. Kadangi po antro lenkimo L pereis į apačią, gausime padėtį $\underset{M\quad L}{\overset{K}{\triangle}}$. Po trečio lenkimo gausime padėtį D, po ketvirto – padėtį C, po penkto – padėtį $\underset{K}{\overset{M\quad L}{\triangledown}}$, po šešto – padėtį A. Toliau padėtys kartosis, todėl po $166 \cdot 6 = 996$ lenkimų turėsime padėtį A. Vadinasi, dar po 3 lenkimų gausime padėtį D.

B24. Žr. M23 uždavinio sprendimą.

B25. Ⓓ 28%

? Sakykime, kad prekė kainavo 100 Lt. Tada po pirmo nupiginimo ji kainuos $100 - \frac{1}{10} \cdot 100 = 90$ (Lt), o po antro nupiginimo $90 - \frac{2}{10} \cdot 90 = 72$ (Lt). Atsakymas A siūlo 30% nupiginimą, – tada prekė kainuotų $100 - \frac{3}{10} \cdot 100 = 70$ (Lt). Vadinasi, nupiginimas turi būti truputį mažesnis. Tikriname atsakymą D, 28% nupiginimą. Tada prekė kainuotų $100 - \frac{28}{100} \cdot 100 = 72$ (Lt). Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad prekė kainavo $100A$ (litų). Tada po pirmo nupiginimo ji kainuos $100A \cdot 0,9 = 90A$ (litų), o po antro – $90A \cdot 0,8 = 72A$ (litų). Todėl nuolaida yra $100A - 72A = 28A$ (litų), o nuolaidos procentinis dydis yra $\frac{28A}{100A} \cdot 100 = 28$ procentai.

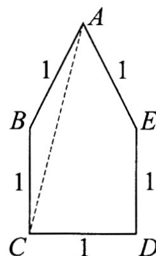
B26. Ⓐ Raudonoje dėžutėje

? Tikrinkime atsakymus. Sakykime, kad teisingas atsakymas A, ir moneta m yra raudonoje dėžutėje R. Tai žymėkime taip: $^{m}_{R}$. Žalia dėžutė Z yra į kairę nuo mėlynos dėžutės M – tai žymėkime ZM. Moneta yra į kairę nuo žirnio z – tai žymime taip: ^{mz}. Raudona dėžutė yra į dešinę nuo kriauklelės

k – tai žymime $\begin{smallmatrix} k & m \\ & R \end{smallmatrix}$. Žirnis yra į dešinę nuo R – tai žymime $\begin{smallmatrix} z \\ R \end{smallmatrix}$. Gaunome padėtį $\begin{smallmatrix} k & m & z \\ Z & R & M \end{smallmatrix}$, kuri tenkina visas sąlygas.
Renkamės atsakymą A.

! Kadangi R yra į dešinę nuo k, tai R nėra kairiausia. Kadangi z yra į dešinę nuo R, tai R nėra dešiniausia. Vadinasi, R yra viduryje. Tada k yra kairėje, z yra dešinėje, todėl monetai m lieka tik vidurinė vieta – raudonoje dėžutėje R.

B27. Ⓐ 15°



? Vargu ar gali pavykti atspėti atsakymą ar išmatuoti kampą – reikia skaičiuoti.

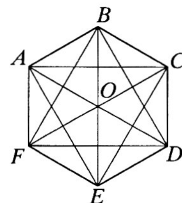
! Iš brėžinio reikia suprasti, kad kampai BCD ir EDC – statieji. Tada $EBCD$ – kvadratas, o trikampis ABE – lygiakraštis. Todėl $\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Trikampis ABC lygiašonis, todėl $\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$.
Taigi teisingas atsakymas A.

B28. Ⓓ 13

? Aišku, kad pasverti galime tik daiktus, kurių masės – ne didesni už 13 sveikieji skaičiai. Taigi atsakymas E iš karto atkrenta.
Iš karto aišku, kad galima pasverti daiktus, kurių masė lygi 1, 3, 9, $1+3$, $1+9$, $3+9$, $1+3+9$, taigi atkrenta atsakymai A ir B. Jeigu dar pavyktų pasverti bent vieną kitokios masės daiktą, tai atkristų ir atsakymas C.
Iki šiol svarsčius dėjome į tą pačią svarstyklių lėkštę. Dabar dėkime, pavyzdžiui 1 kg į kairę lėkštę, o 3 kg į dešinę. Aišku, kad padėjus 2 kg daiktą į kairę lėkštę, svarstyklės bus pusiausviros. Taigi galime pasverti ir 8-tą masę.
Renkamės atsakymą D.

! Kad spėjimas virstų sprendimu, reikia įrodyti, kad galima pasverti kiekvieną daiktą, kurio masė lygi bet kuriam sveikajam skaičiui nuo 1 iki 13. Jau matėme, kad daiktą galima pasverti, jei reikiamą masę galima sudaryti iš dėmenų 1, 3, 9. Bet taip pat daiktą galima pasverti, jeigu kai kuriuos dėmenis imsime su minusais. Lengva išrašyti visas reikiamas kombinacijas: 1, $3-1$, 3, $3+1$, $9-3-1$, $9-3$, $9-3+1$, $9-1$, 9, $9+1$, $9+3-1$, $9+3$, $9+3+1$. Taigi teisingas atsakymas D.

B29. Ⓓ 24



? Atsakymai teigia, kad tokių kampų yra. Spėjame, kad tai „mažieji“ kampai, kurių prie kiekvienos viršūnės yra 4. Vadinasi, iš viso yra $6 \cdot 4 = 24$ kampai.
Renkamės atsakymą D.

! Įrodysime, kad kiekvienas iš 4 kampų prie viršūnės yra A lygus 30° (daug neaiškindami remsimės brėžinio „simetriškumu“; beje, žr. uždavinio K5 sprendimą).

Imkime $\triangle AOB$. $\angle AOB = 60^\circ$, nes 6 tokie kampai sudaro pilnąjį kampą. Kadangi $OA = OB$, tai $\triangle AOB$ lygiašonis, ir $\angle BAO = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$. Todėl $\triangle AOB$ yra lygiakraštis. Kampą ABC sudaro du 60° kampai, todėl $\angle ABC = 120^\circ$. Kadangi $\triangle ABC$ lygiašonis, tai $\angle BAC = 30^\circ$. Tada $\angle CAO = \angle BAO - \angle BAC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. Analogiškai įrodome, kad $\angle OAE = \angle EAF = 30^\circ$.

Vadinasi, visi 4 kampai prie kiekvienos iš 6 viršūnių turi 30°, ir jų yra $6 \cdot 4 = 24$. Kadangi $OBCD$ yra rombas, jo įstrižainės statmenos, tai nesunku įsitikinti, kad daugiau 30° kampų nėra (galima rasti tik 60°, 90° ir 120° kampus).
Taigi teisingas atsakymas D.

B30. Ⓔ 25

? Liekanos dalijant iš 11 gali būti nuo 0 iki 10. Liekanos dalijant iš 14 gali būti nuo 0 iki 13. Todėl gautų liekanų suma negali būti didesnė už 23.
Renkamės atsakymą E.

?? Labai nesunku nurodyti skaičius, kuriuos dalijant iš 11 ir iš 14 duotų liekanų sumą A, B, C, D. Iš tikrųjų, skaičius 154 dalijasi ir iš 11, ir iš 14, taigi duoda liekanas, lygias 0, todėl ir jų suma lygi 0. Skaičius 14 duoda liekanas 0 ir 3, jų suma lygi 3. Skaičius 11 duoda liekanas 0 ir 11, jų suma lygi 11. Skaičius 40 duoda liekanas 7 ir 12, jų suma lygi 19. Renkamės atsakymą E.

! Matėme, kad skaičiai A, B, C, D gali būti liekanų suma, o skaičius E – negali. Vadinasi, teisingas atsakymas E.

!! Įrodysime, kad liekanų suma gali būti bet kuris skaičius nuo 0 iki 23.
Kad liekanų suma būtų 0, reikia, kad abi liekanos būtų 0, t. y. N turi dalytis ir iš 11, ir iš 14. Mažiausias toks skaičius yra $154 = 11 \cdot 14$. Dabar sudarome tokią lentelę:

Skaičius	Liekanos dalijant iš		Liekanų suma	Skaičius	Liekanos dalijant iš		Liekanų suma
	11	14			11	14	
$154+1$	1	1	2	$154-1$	10	13	23
$154+2$	2	2	4	$154-2$	9	12	21
$154+3$	3	3	6	$154-3$	8	11	19
$154+4$	4	4	8	$154-4$	7	10	17
$154+5$	5	5	10	$154-5$	6	9	15
$154+6$	6	6	12	$154-6$	5	8	13
$154+7$	7	7	14	$154-7$	4	7	11
$154+8$	8	8	16	$154-8$	3	6	9
$154+9$	9	9	18	$154-9$	2	5	7
$154+10$	10	10	20	$154-10$	1	4	5
				$154-11$	0	3	3

Turime visas sumas, išskyrus 1 ir 22. Sumą 1 gauti nesunku: imkime, pavyzdžiui, 14 kartotinius: 14, $2 \cdot 14$, $3 \cdot 14$, ... Liekanų suma bus 3, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$, $4 \cdot 3$ (t. y. 1). Taigi skaičius 56 duoda liekanų sumą 1.
Panašiai gausime liekaną 22. Imkime, pavyzdžiui, seką skaičių $14k + 13$. Dalijami iš 14 jie duoda liekaną 13. O imant $k = 1, 2, 3, \ldots$, dalijimo iš 11 liekanos bus 5, 8, 0, 3, 6, 9. Taigi reikia imti skaičių $14 \cdot 6 + 13 = 97$. Dalijamas iš 11 jis duoda liekaną 9. Tada liekanų suma bus $9 + 13 = 22$.

KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. Žr. uždavinio B6 sprendimą.

K2. Ⓐ 20

? Spėlioti čia visiškai neverta.

! Vėl mus norima apgauti ir įteigti atsakymą $3 \cdot 20 = 60$, t. y. atsakymą D. Iš tikrųjų padidinus (ar sumažinus) nuotrauką viskas pakinta proporcingai. Taigi balta spalva užims, kaip ir užėmusi, 20% ploto.
Teisingas atsakymas A.

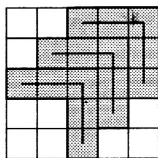
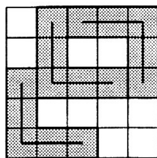
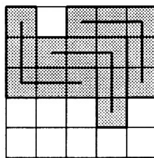
K3. Ⓓ 2 h 02 min

? Užmetus akį, aišku, kad praeis šiek tiek daugiau nei 2 valandos, todėl lieka tik atsakymai C ir D. Bet spėti vis tiek neverta.

! Paprasčiausiai atėmę, gauname 13 val. 13 min. – 11 val. 11min. = 2 val. 2 min. Taigi teisingas atsakymas D.

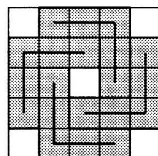
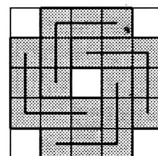
K4. Ⓒ 4

? Pabandžius keletą dėjimo variantų, pavyzdžiui, tokių kaip čia pavaizduoti, nesunku patikėti, kad telpa tik 3 kampai:

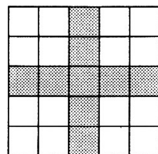
Taigi tarsi reikėtų rinktis atsakymą B.

Vis dėlto buvo konkurso dalyvių, kuriems iš karto pavyko sutalpinti 4 kampus, ir jie gavo vieną ar kitą iš pavaizduotų konfigūracijų (jos yra simetriškos, taigi iš esmės sutampa). Visiškai aišku, kad netinka atsakymas E, nes 6 kampai užimtų 30 langelių, o kvadrate jų tik 25. Beveik aišku, kad netiks ir atsakymas D. Todėl jie pasirinko atsakymą C.

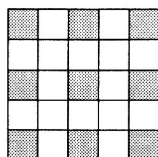



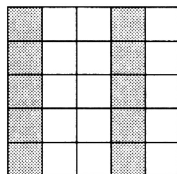
! Iki griežto sprendimo trūksta įrodymo, kad 5 kampai netelpa.
Pateiksime net keletą šio teiginio įrodymų – visi jie pakankamai pamokomi.

Pirmas būdas. Kad ir kaip padėsime kampą, jis užims mažiausiai du užtušuotus langelius iš trečios eilutės ir trečio stulpelio kvadratėlių sudaryto „kryžiaus" viršutiniame paveikslėlyje, o tų langelių tėra 9. Vadinasi, penkių kampų padėti neįmanoma.



Antras būdas. Tarkime, kad pavyko padėti 5 kampus. Tada visi kvadrato laukeliai bus užimti, todėl bus užimti ir visi kampiniai langeliai. Bet vienas kampas gali uždengti tik vieną kampinį kvadratėlį, todėl bus 4 kampai, kurie dengia po kampinį kvadratėlį. Bet jeigu kampas dengia kampinį langelį, tai jis dengia 3 iš 9 užtušuotų langelių apatiniame paveikslėlyje. Vadinasi, 4 kampai uždengs 12 užtušuotų langelių, o jų tėra tik 9, – prieštara.



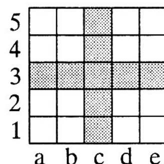


Trečias būdas. Užtušuokime kvadrato pirmo ir ketvirto stulpelio kvadratėlius – iš viso 10 kvadratėlių. Nesunku įsitikinti, kad nors ir kaip padėsime kampą kvadrate, jis dengs arba 1 užtušuotą langelį, arba 3.
Tarkime, kad mums pavyko padėti 5 kampus. Tada visi kvadrato langeliai bus uždengti, taigi bus uždengti ir 10 užtušuotų langelių. Juos uždengė 5 kampai, kurių kiekvienas uždengė nelyginį langelių skaičių (1 arba 3). Bet nelyginio skaičiaus nelyginių dėmenų suma negali būti lyginė, – prieštara.
Teisingas atsakymas C.

Beje, šis vadinamasis spalvinimo būdas – labai veiksmingas metodas įrodant įvairių konstrukcijų negalimumą (žr. taip pat knygelę „Kengūra – 1999“, psl. 54).

!! Įrodysime, kad 4 kampus galima padėti tik vieninteliu būdu (t. y. gauti aukščiau pavaizduotą konfigūraciją ar jos veidrodinį atspindį). Kitaip sakant, įrodysime (nors uždavinyje to visai neprašoma), kad tie dalyviai, kurie atspėjo reikiamą konfigūraciją padėti 4 kampams, jokios kitos konfigūracijos atspėti ir negalėjo.

Sakykime, kad padėjome 4 kampus. Kad ir kaip dedame kampą, jis užima 1 arba 3 trečios horizontalės langelius. Bet jei jis užimtų 3 langelius, tai kitiems trims kampams jų liktų tik 2, – prieštara. Vadinasi, kiekvienas kampas užima lygiai 1 trečios horizontalės langelį. Lygiai taip pat kiekvienas kampas užima lygiai 1 trečios vertikalės langelį. Be to, nė vienas neužima centrinio langelio, – priešingu atveju to langelio vertikalus arba horizontalus kaimynas užimtų dar vieną trečios horizontalės ar vertikalės langelį. Taigi įrodėme, kad kiekvienas iš 4 kampų turi lygiai po vieną trečios vertikalės ir trečios horizontalės langelį.



Taip pat aišku, kad nė vieno kampo viršūnė nėra trečioje horizontalėje (vertikalėje). Iš tikrųjų, jei taip būtų, tai kampe tos viršūnės horizontalusis kaimynas taip pat priklausytų trečiai horizontalei. Vadinasi, bet kurio kampo viršūnė yra vienoje iš neužtušuotų kvadratinių zonų.
Dviejų kampų viršūnės negali būti vienoje zonoje. Iš tikrųjų, kadangi kampų „kraštinės“ nukreiptos į tą pačią pusę, tai jos negali būti vienoje vertikalėje ar horizontalėje (pvz., a1 ir b1 ar b1 ir b2; kaip šachmatuose, vertikales sužymėjome raidėmis a, b, c, d, e, horizontales skaičiais 1, 2, 3, 4, 5). Jos negali būti a2 ir b1, nes tada langelis b2 būtų joms bendras. Vadinasi, tai galėtų būti tik a1 ir b2. Bet tada viršūnių nebebus nei kairėje viršutinėje, nei dešinėje apatinėje zonoje. Todėl viršūnės bus d4 ir e5, bet kampas d4 tada nebetelpa (langelis b4 būtų bendras jam ir kampui b2).

Viršūnė negali būti langelyje b2: jeigu viršūnė langelyje b2, tai kairėje viršutinėje zonoje ji negali būti a4 ar b5 (bendras būtų langelis b4). Vadinasi, tada viršūnė a5, analogiškai e1, ir nebelieka vietos ketvirtam kampui (viršūnėms e4 ar e5 trukdo užimtas langelis c5, o viršūnei d4 – pavyzdžiui, langelis b4).

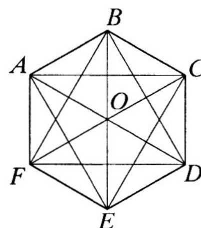
Vadinasi, viršūnės gali būti tik langeliuose a1, b1, b2 ir atitinkamuose kitų zonų langeliuose. Kadangi vienu metu negali būti viršūnės a1 ir a5 (kampai turėtų bendrą langelį a3, tai bent viena viršūnė yra ne kampe. Dėl simetrijos galime laikyti, jog tai viršūnė b1. Tada kampui b1 priklauso langelis d1. Tai reiškia, kad dešinėje apatinėje zonoje viršūnė negali būti e1. Vadinasi, tai viršūnė e2. Kampas e2 užima langelį e4, todėl dešinėje viršutinėje zonoje viršūnė bus d5. Kampas d5 užima langelį b5, todėl kairėje viršutinėje zonoje viršūnė bus a4.

Gavome 49 psl. kairiąją konfigūraciją. Jeigu būtume pradėję nuo langeliui b1 įstrižainės atžvilgiu simetriško langelio a2, būtume gavę 49 psl. dešiniąją konfigūraciją.

Įrodymas baigtas – į kvadratą 5×5 įtalpinti 4 kampus įmanoma tiktai taip, kaip tat parodyta minėtose konfigūracijose.

K5. Ⓓ 13

? Be brėžinio čia ką nors pasakyti sunku.



! Nusibraižome brėžinį. Leisdamiesi, pavyzdžiui, žemyn ir skaičiuodami susikirtimo taškus ant horizontaliųjų įstrižainių ir joms lygiagrečių horizontaliųjų tiesių, einančių per vidinius įstrižainių susikirtimo taškus, gauname $3+2+3+2+3 = 13$ susikirtimo taškų. Žinoma, skaičiuoti galima ir kitaip – svarbu susidaryti tam tikrą sistemą, kaip nepraleisti susikirtimo taškų ir kaip neįskaityti to paties taško 2 kartus.
Teisingas atsakymas D.

!! Mums duota, kad šešiakampio $ABCDEF$ visos kraštinės ir visi kampai lygūs. Pasižiūrėkime, kaip galima būtų įrodyti, kad ilgosios įstrižainės AD, BE ir CF kertasi viename taške O (tik tada mes skaičiavome teisingai).

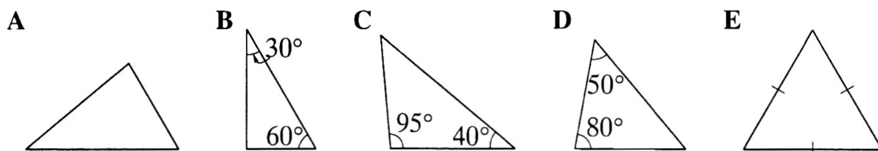
Šešiakampio kampų suma lygi $180° \cdot (6-2) = 720°$, todėl kiekvienas kampas lygus $720° : 6 = 120°$. Trikampis BCD lygiašonis, todėl jo kampai prie pagrindo lygūs po $30°$. Vadinasi, $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 120° - 30° = 90°$. Analogiškai visi keturkampio $ABDE$ kampai statūs, taigi tai stačiakampis.

Sakykime, kad tik dabar vedame įstrižaines AD ir BE. Jos kirsdamosi dalija viena kitą pusiau, taigi O – įstrižainės AD vidurio taškas. Dabar nagrinėkime stačiakampį $ACDF$. Jo įstrižainė CF taip pat dalija AD pusiau, taigi eina per O.

Vadinasi, iš tikrųjų bet kurios dvi ilgosios įstrižainės turi tik vieną susikirtimo tašką – O.

Beje, dabar nesunku įstrižainių susikirtimo taškus suskaičiuoti ir taip. Imkime $\triangle OAB$. Jo viduje yra tik vienas įstrižainių susikirtimo taškas, o kraštinėse OA ir OB – dar po vieną. Vadinasi, visų 6 trikampių viduje yra 6 taškai. Kiekviename iš 6 spindulių OA, OB, ... yra dar po vieną tašką – iš viso 12 taškų. Pridėję dar tašką O, iš viso gauname 13 taškų.

K6. Ⓓ



? Iš karto matome, kad A ir B nėra lygiašoniai, o E yra lygiakraštis. Taigi reikia rinktis iš atsakymų C ir D, bet vargu ar čia verta spėti.

! Atsakymas A netinka – trikampis nepanašus į lygiašonį; be to, kampas prie viršūnės artimas stačiajam, o kampai prie pagrindo neabejotinai smailieji.
Trikampio B trečias kampas lygus $180° - 30° - 60° = 90°$, taigi trikampis nėra lygiašonis.
Trikampio C trečias kampas lygus $180° - 95° - 40° = 45°$, taigi jis nėra lygiašonis.
Trikampio D trečias kampas lygus $50°$, taigi jis tikrai yra lygiašonis.
Trikampis E yra lygiakraštis; tai spėjame iš akies, be to, kraštinės pažymėtos tuo pačiu ženkliuku.
Taigi teisingas tik atsakymas D.

K7. Ⓑ 3

? Ir vėl spėti neverta.

! Įsivaizduokime, kad juostelę pridėjome prie ašies, jos pradžią sutapdinę su 0, o galą su 100 (kitaip sakant, ašies vienetinė atkarpa yra 1 cm). Tada padalijus juostelę į 4 lygias dalis, brūkšnelių koordinatės bus 25, 50, 75. Padalijus ją į 3 dalis, brūkšnelių koordinatės bus $33\frac{1}{3}$, $66\frac{2}{3}$. Vadinasi,

brūkšneliai išsirikiuos taip: 25, $33\frac{1}{3}$, 50, $66\frac{2}{3}$, 75. Sukarpius juostelę, gabaliukų ilgiai bus

$$25-0=25,\quad 33\frac{1}{3}-25=8\frac{1}{3},\quad 50-33\frac{1}{3}=16\frac{2}{3},$$
$$66\frac{2}{3}-50=16\frac{2}{3},\quad 75-66\frac{2}{3}=8\frac{1}{3},\quad 100-75=25.$$

Taigi gabaliukai bus 3 skirtingų ilgių, ir teisingas atsakymas B.

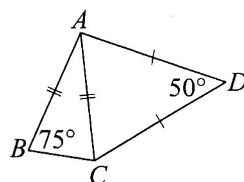
!! Kadangi brūkšneliai eina vienodai ir nuo pradžios, ir nuo galo, tai viskas bus simetriška taško 50 atžvilgiu. Todėl užtenka nagrinėti pirmus tris gabaliukus.

K8. Ⓐ 11

? Kadangi atsakymai „surikiuoti“, tai verta tikrinti nuo vidurio – atsakymo C. Tada $15+17+19+21+23+25+27=40+40+40+27=147$, ir gavome per daug.
Tikriname mažesnius skaičius, atsakymą B: $13+15+17+19+21+23+25$. Čia sudėti nebereikia – kadangi kiekvienas dėmuo sumažėjo dvejetu, tai suma bus mažesnė 14, taigi gausime 133.
Liko patikrinti atsakymą A. Kadangi suma vėl sumažės 14, tai suma kaip tik bus lygi 119.
Renkamės atsakymą A.

! Aišku, kad visų 7 skaičių vidurkis lygus viduriniam skaičiui. Bet vidurkis yra lygus $119:7=17$, todėl vidurinis skaičius yra 17. Mažiausias skaičius už jį šešiais mažesnis, ir gauname 11.
Teisingas atsakymas A.

K9. Ⓐ 95°



? Iš brėžinio matome, kad kampas BAD labai mažai skiriasi nuo stačiojo.
Renkamės atsakymą A.

! Kadangi $\triangle DAC$ lygiašonis, tai $\angle DAC=\frac{1}{2}(180^\circ-50^\circ)=65^\circ$. Kadangi $\triangle ABC$ lygiašonis, tai $\angle BAC=180^\circ-75^\circ-75^\circ=30^\circ$. Taigi $\angle BAD=30^\circ+65^\circ=95^\circ$.
Teisingas atsakymas A.

K10. Ⓓ 90 min

? Atsakymai išrikiuoti, tad pradėkime spėti nuo vidurinio atsakymo C. Per 60 minučių prižiūrėtojas išmaudys 1,5 dramblio, o sūnus 0,5 dramblio, taigi kartu jie išmaudys 2 dramblius, o ne visus 3, kaip reikia.
Tikrinkime atsakymą E. Per 100 minučių prižiūrėtojas išmaudys 2,5 dramblio, o sūnus – daugiau kaip vieną dramblį, taigi jiems reikės laiko mažiau.
Taigi renkamės atsakymą D.

! Liko įsitikinti, kad atsakymas D tikrai tinka. Prižiūrėtojas per 90 min. išmaudo $2\frac{1}{4}$ dramblio. Sūnus per pusę valandos išmaudo $\frac{1}{4}$ dramblio, todėl per 3 pusvalandžius išmaudys $\frac{3}{4}$ dramblio. Kartu per 90 min. jie išmaudys $2\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=3$ dramblius.
Teisingas atsakymas D.

!! Galima uždavinį spręsti tradiciškai: kadangi prižiūrėtojas dramblį maudo $\frac{2}{3}$ h, tai per 1 h jis išmaudys $\frac{3}{2}$ dramblio; sūnus per 1 h išmaudo $\frac{1}{2}$ dramblio. Abu kartu per 1 h jie išmaudo $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ dramblius. Todėl 3 dramblius jie išmaudys per $\frac{3}{2}$ h, t. y. per 90 min.
Bet žymiai įdomiau apsieiti be „pusdramblių“. Kol sūnus per 2 valandas išmaudo dramblį, prižiūrėtojas išmaudo 3 dramblius. Vadinasi, kartu per 120 min. jie išmaudo 4 dramblius. Vadinasi, 1 dramblį jie maudo 30 min., o 3 dramblius – 90 min.

K11. Žr. uždavinio M23 sprendimą.

K12. Ⓐ $AROOAROO$

? Spėdami galime imti konkrečius skaitmenis. Pavyzdžiui, imkime $K = 1$, $A = 2$, $N = 3$, $G = 4$, $R = 5$, $O = 6$. Tada

$$\begin{aligned} &10\,000 \cdot AROO - 10\,000 \cdot KANG + KANGAROO = \\ &= 10\,000 \cdot 2\,566 - 10\,000 \cdot 1\,234 + 12\,341\,566 = \\ &= 25\,660\,000 - 1\,234\,000 + 12\,342\,566 = \\ &= 25\,660\,000 + 2\,566 = 25\,662\,566. \end{aligned}$$

Taigi 4 skaitmenys turi kartotis, o prasidėti skaičius turi raide A.
Toks yra tik atsakymas A.

! Nesunku spręsti ir bendru pavidalu:

$$\begin{aligned} L &= 10\,000 \cdot AROO - 10\,000 \cdot KANG + KANGAROO = \\ &= AROO0000 - KANG0000 + KANG0000 + AROO = \\ &= AROO0000 + AROO = AROOAROO. \end{aligned}$$

Vadinasi, teisingas tik atsakymas A.

!! Sprendimą galima užrašyti kiek trumpiau:

$$\begin{aligned} L &= 10^4 \cdot AROO - 10^4 \cdot KANG + 10^4 \cdot KANG + AROO = \\ &= AROO0000 + AROO = AROOAROO. \end{aligned}$$

!!! Sąlygoje nurodyta, kad vienodos raidės atitinka vienodus skaitmenis, o skirtingos raidės – skirtingus skaitmenis. Jeigu apie tai nieko nepasakoma, paprastai uždavinį taip ir suprantame. Ir vistik pasižiūrėkime, kas galėtų atsitikti, formuluojant sąlygą kitaip.
Sakykime, kad reikalaujama, jog vienodos raidės atitiktų vienodus skaitmenis, bet nereikalaujama, kad skirtingos raidės atitiktų skirtingus skaitmenis. Tada jeigu vietoj kiekvienos raidžių imsime, pavyzdžiui, skaitmenį 5, tai visi penki atsakymai tiks.
Dabar sakykime, jog reikalaujama, kad skirtingas raides atitiktų skirtingi skaitmenys, bet nereikalaujama, kad vienodas raides atitiktų vienodi skaitmenys. Imkime $k = 1$, $K = 2$ (t. y. vienoje vietoje K imkime 1, o kitoje – 2). Tada
$10\,000 \cdot AROO - 10\,000 \cdot kANG + KANGAROO = AROOAROO + 10^7(K - k)$.
Jeigu, pavyzdžiui, dabar imsime $A = 9$, $N = 6$, $G = 5$, $R = 8$, $O = 7$, tai gausime

$$98\,779\,877 + 10^7(2 - 1) = 108\,779\,877,$$

t. y. devynženklį skaičių, ir netinka nė vienas atsakymas.

Pastaba. Žodis $KANGAROO$ angliškai reiškia „kengūra“.

K13. Ⓓ Q ir T

? Spėti čia sunku – reikia perrinkti atsakymus. Tikriname atsakymą A – ar galėjo atsitikti, kad T ir S bučiavosi? Jei T ir S bučiavosi, tai T bučiavosi su P ir su T, o daugiau su niekuo. P bučiavosi vienintelį kartą – su T. Kadangi R bučiavosi dukart, tai tat galėjo būti tik Q ir S. Dabar visos sąlygos įvykdytos: P bučiavosi vienintelį kartą su T, Q bučiavosi vienintelį kartą su R, R bučiavosi tik su Q ir S, S bučiavosi tik su T ir su R, T bučiavosi tik su P ir su S.
Vadinasi, atsakymas A netinka – galėjo taip atsitikti, kad T ir S bučiavosi.

Jau matome, kad taip spėlioti sunku – reikia susidaryti schemą. Pasidarykime 1 lentelę.
Joje pažymėta, kiek kartų kuri ponia bučiavosi. Kadangi ponios pačios su savimi bučiuotis negalėjo, tai įstrižainėje rašome minusus. Sąlygoje dar duota, kad P bučiavosi su T (taigi ir T bučiavosi su P), todėl eilutėje P ties T rašome + ir eilutėje T stulpelyje P rašome +. Tikrinkime šioje schemoje atsakymą A – tarkime, kad T ir S bučiavosi, ir žiūrėkime, kas iš to išeis.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–				+
1	Q		–			
2	R			–		
2	S				–	
2	T	+				–

1 lentelė

Padėję + pozicijose ST ir TS, gauname 2 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–				+
1	Q		–			
2	R			–		
2	S				–	+
2	T	+			+	–

2 lentelė

Kadangi eilutėje P gali būti tik vienas pliusas, tai kitus surašome minusus. Lygiai taip pat stulpelyje P gali būti vienas pliusas, todėl kiti minusai. Panašiai eilutėje T jau yra 2 pliusai, tad kitus surašome minusus, tas pat stulpelyje T. Gauname 3 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–			–
2	R	–		–		–
2	S	–			–	+
2	T	+	–	–	+	–

3 lentelė

Pagal sąlygą eilutėje R ir stulpelyje R turi būti 2 pliusai, ir jiems kaip tik likusios 2 vietos (4 lentelė). Matome, kad parašius likusiuose langeliuose abu minusus, uždavinio sąlyga bus patenkinta.
Įsitikinome, kad taip žymiai lengviau samprotauti ir užrašinėti samprotavimus.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–	+		–
2	R	–	+	–	+	–
2	S	–		+	–	+
2	T	+	–	–	+	–

4 lentelė

Tikrinkime atsakymą B – ar galėjo bučiuotis ponios T ir R. Gauname 5 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–			
2	R	–		–		+
2	S	–			–	
2	T	+		+		–

5 lentelė

Užpildę minusais eilutę ir stulpelį T, gauname 6 lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–			–
2	R	–		–		+
2	S	–			–	–
2	T	+	–	+	–	–

6 lentelė

Matome, kad eilutėje ir stulpelyje S reikia rašyti abu pliusus. Gauname 7 lentelę. Vadinasi, įrašę minusus į likusius du langelius, gauname teisingą lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–		+	–
2	R	–		–	+	+
2	S	–	+	+	–	–
2	T	+	–	+	–	–

7 lentelė

Tikriname atsakymą C – ar galėjo bučiuotis ponios Q ir R? Tarkime, kad galėjo (8 lentelė).

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–	+	–	–
2	R	–	+	–		
2	S	–	–		–	
2	T	+	–			–

8 lentelė

Užpildę minusais eilutę ir stulpelį Q, matome, kad eilutėje ir stulpelyje S reikia rašyti abu pliusus (9 lentelė). Įrašę likusius minusus, vėl gausime teisingą lentelę.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–	+	–	–
2	R	–	+	–	+	
2	S	–	–	+	–	+
2	T	+	–		+	–

9 lentelė

Tikriname atsakymą D. Sakykime, kad ponios Q ir T bučiavosi (10 lentelė).

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–			+
2	R	–		–		
2	S	–			–	
2	T	+	+			–

10 lentelė

Tada Q (eilutę ir stulpelį) ir T reikia baigti pildyti minusais (11 lentelė). Matome, kad eilutėje S nebeliko vietos dviem pliusams. Vadinasi, ponios Q ir T bučiuotis negalėjo.
Renkamės atsakymą D.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–	–	–	+
2	R	–	–	–		–
2	S	–	–		–	–
2	T	+	+	–	–	–

11 lentelė

! Iki pilnos perrankos liko atsakymas E. Tarkime, kad ponios Q ir S bučiavosi (12 lentelė).

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–	–	+	–
2	R	–	–	–		
2	S	–	+		–	
2	T	+	–			–

13 lentelė

Užpildome minusais eilutę ir stulpelį Q (13 lentelė). Matome, kad eilutėje ir stulpelyje R reikia rašyti du pliusus. Likusiuose langeliuose parašę minusus gauname teisingą lentelę.

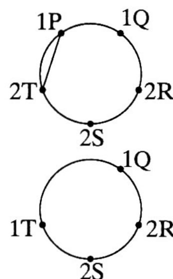
Vadinasi, ponios Q ir S taip pat galėjo bučiuotis.
Taigi tikrai nesibučiavo tik ponios Q ir T. Kitos ponios galėjo ir bučiuotis.
Vadinasi, teisingas tik atsakymas D.

		1	1	2	2	2
		P	Q	R	S	T
1	P	–	–	–	–	+
1	Q	–	–		+	
2	R	–		–		
2	S	–	+		–	
2	T	+				–

12 lentelė

!! Pirmas sprendimo būdas vis dėlto labai nevaizdus.
Užrašykime sąlygą schemiškai taip:

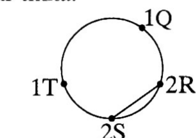
Kadangi ponia P daugiau bučiuotis negali, o T gali bučiuotis tik vieną kartą, tai schemą galima perrašyti paprasčiau:



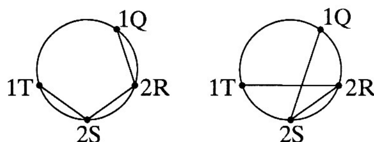
Dabar reikia taškus Q, R, S, T sujungti atkarpomis taip, kad iš Q eitų 1 atkarpa, iš R – 2, iš S – 2 ir iš T – 1 atkarpa.

Iš karto aišku, kad jei sujungsime T su Q, tai jų daugiau liesti nebebus galima, ir liks tik taškai R ir S. Sujungę juos, daugiau atkarpų išvesti negalėsime. Taigi atsakymas D tikrai tinka.

Įsitikinti, kad visi kiti atsakymai (ir net nepaminėtasis – R ir S) įmanomi, labai lengva. Sujunkime R su S:



Turime du tolimesnio jungimo būdus. Kairys paveikslas įrodo, kad atsakymai A ir C neteisingi, o dešinys – kad B ir E neteisingi.



K14. Ⓒ 54°

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, pradėkime nuo atsakymo C. Išpjovos kampas 54° sudaro $\frac{54}{360} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ pilnutinio kampo, t. y. 15%. Kadangi išpjovos kampas ir plotas proporcingi, tai ir išpjovos plotas sudarys 15% skritulio ploto.
Renkamės atsakymą C.

! Atspėjus atsakymą, aišku, kad kiti atsakymai netinka: jei išpjovos kampas bus didesnis, tai ir jos plotas bus didesnis, o jei kampas mažesnis, tai ir plotas mažesnis.

!! Geriausia skaičiuoti. Jeigu plotas sudaro 15% viso skritulio ploto, tai ir jos kampas sudaro 15% pilnutinio kampo, t. y. $0,15 \cdot 360 = 1,5 \cdot 36 = 3 \cdot 18 = 54$ laipsnius.
Teisingas atsakymas C.

K15. Ⓑ 5

? Vėl atsakymai išrikiuoti, vėl tikriname atsakymą C.
10 dukatų verti 80 grašių; 10 grašių verti 25 talerių, todėl 800 grašių verti 200 talerių.
Matome, kad mums reikia dvigubai mažiau, taigi reikia imti 5 dukatus.
Renkamės atsakymą B.

! Sąlygos teiginius galima užrašyti paprasčiau: 8 grašiai verti 1 dukato, 10 grašių verti 25 talerių. Todėl $100 = 25 \cdot 4$ talerių atstoja $10 \cdot 4 = 40$ grašių, o $40 = 8 \cdot 5$ grašių atstoja $1 \cdot 5 = 5$ dukatus.

!! Jeigu nebijome trupmenų, turime: 1 taleris atstoja $\frac{100}{250} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ grašio; vienas grašis atstoja $\frac{100}{800} = \frac{1}{8}$ dukato. Todėl 100 talerių atstoja $100 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} = 100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 5$ dukatus.
Teisingas atsakymas B.

K16. Ⓓ 300

? Galima spėti, kad viršutinis sluoksnis buvo 7×11 gabaliukų, šoninis (jau nuvalgius viršutinį) 5×11, o dar nenuvalgius – 6×11 gabaliukų. Taigi nenuvalgytas stačiakampis gretasienis buvo $6 \times 7 \times 11$. Kai buvo nuvalgyta po 1 sluoksnį, jis turėjo $5 \times 6 \times 10 = 300$ gabaliukų cukraus.
Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad dėžutėje telpa a sluoksnių einant iš apačios į viršų, b sluoksnių iš kairės į dešinę ir c sluoksnių iš priekio į užpakalį. Tada dėžutėje buvo $a \times b \times c$ gabaliukų cukraus. Kai Marytė suvalgė viršutinį sluoksnį, dėžutėje liko stačiakampis gretasienis iš $(a-1) \times b \times c$ gabaliukų. Kai ji suvalgė šoninį sluoksnį, cukraus gretasienį sudarė $(a-1) \times (b-1) \times c$ gabaliukų. Kai ji suvalgė priekinį jo sluoksnį, gretasienį sudarė $(a-1) \times (b-1) \times (c-1)$ gabaliukų.
Sąlygoje duota, kad viršutinis sluoksnis buvo $b \times c = 77$ gabaliukai, o jį suvalgius šoninis sluoksnis tapo $(a-1) \times c = 55$ gabaliukai. Išspręsti šias lygtis nesunku, nes a, b ir c – natūralieji skaičiai. Matome, kad c yra skaičių $77 = 7 \cdot 11$ ir $55 = 5 \cdot 11$ bendras daliklis. Vadinasi, c gali būti tik 1 arba 11.
Sakykime, kad $c = 1$, tada $b = 77$, o $a - 1 = 55$, t. y. $a = 56$. Tai reikštų, kad dėžutėje buvo $56 \times 77 \times 1$ gabaliukų cukraus. Viršutinis sluoksnis būtų 77×1. Jį suvalgę gautume $55 \times 77 \times 1$ gabaliukų gretasienį. Suvalgius šoninį sluoksnį iš 55×1 gabaliukų, liktų gretasienis iš $55 \times 76 \times 1$ gabaliukų. Pagaliau suvalgius priekinį sluoksnį (tik vienas jis iš pat pradžių ir buvo, tik didesnis) 55×76, liktų gretasienis $55 \times 76 \times 0$, t. y. 0 gabaliukų. Šiaip jau šis atsakymas tiktų, bet jo nėra galimų atsakymų sąraše.
Sakykime, kad $c = 11$, tada $b = 7$, $a = 6$. Kaip jau matėme, tai reiškia, kad liko $(a-1) \times (b-1) \times (c-1) = 5 \times 6 \times 10 = 300$ gabaliukų.

Vadinasi, uždavinys nėra visai korektiškas – įmanomi atsakymai 0 ir 300. Bet jeigu sutiksime, kad uždavinį reikia spręsti „kengūriškai", tai viskas gerai: iš pateiktų atsakymų tinka tik D.

K17. © 8

? Balų vidurkį 5,625 padauginę iš 2, gautume 11,25 – jau tik du ženklai po kablelio. Dar padauginę iš 2, turime 22,5. Dar padauginę iš 2, gauname 45. Spėjame, kad 8 ir yra mažiausias teisėjų skaičius. Renkamės atsakymą C.

?? Jei teisėjų būtų 2, tai dalyvių balų suma 11,25 nebūtų sveika. Jei teisėjų būtų 6, tai balų suma irgi nebūtų sveika – 33,75. Jei teisėjų būtų 8, tai balų suma 45. Kiti atsakymai nurodo didesnį teisėjų skaičių, ir net jei balų suma išeitų sveika, vis tiek rinktumės atsakymą 45.

! „Kengūrišką" sprendimą jau turime. Įdomu išspręsti uždavinį nesiremiant atsakymais. Sakykime, kad teisėjų buvo n, o balų suma S ($n \in \boldsymbol{N}$, $S \in \boldsymbol{N}$). Kadangi vidurkis lygus $\frac{S}{n}$, tai turime lygybę $\frac{S}{n} = 5{,}625$. Ją pertvarkome: $8S = 45n$. Reikia rasti mažiausią n, kuris tenkina šią lygybę. Bet n dalijasi iš 8 (nes 45 neturi bendrų daliklių su 8), o mažiausias iš skaičiaus 8 kartotinių yra 8. Tikriname, ar $a = 8$ tinka. Gauname, kad $S = 45$.
Dabar reikia įsitikinti, kad tokia teisėjų balų suma galėjo būti. Bet tai visai paprasta: kadangi 45 dalijant iš 8 su liekana dalmenį gauname 5, o liekaną 5, tai trims teisėjams priskiriame po 5 balus, o likusiems penkiems – po 6.
Teisingas atsakymas C.

!! Jau įrodėme, kad teisėjų skaičius turi dalytis iš 8. Todėl „kengūriškame" uždavinyje galima buvo klausti: *Kiek teisėjų galėjo būti*? Jeigu tokį klausimą užduotume nenurodę atsakymų, tai atsakymas būtų toks: galėjo būti $8k$, $k \in \boldsymbol{N}$, teisėjų.

!!! Ir vis dėlto iškyla dar viena problema (jų visuomet iškyla vadinamuosiuose „realaus turinio" uždaviniuose). Čia ta problema tokia – nenurodyta, nei kiek teisėjų buvo (ar galėtų būti) varžybose, nei po kiek daugiausiai balų jie gali skirti (ačiū dievui, nurodyta, kad balų skaičius sveikas). Kai tai nurodoma, atsakymas gali būti visai kitas. Pavyzdžiui, jeigu būtų pasakyta, kad teisėjų ne daugiau kaip dvidešimt, o kiekvienas gali skirti nuo 0 iki 5 balų, tai uždavinio atsakymas būtų 16 (nes esant aštuoniems teisėjams didžiausia balų suma galėtų būti tik 40).

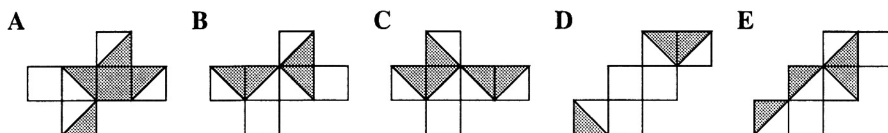
K18. © Nakties temperatūra negali būti 27°

? Tikrinkime atsakymus iš eilės. Klauskime save: ar būtinai A, t. y. ar būtinai nakties temperatūra žemesnė už 25°? Sakykime, pavyzdžiui, kad nakties temperatūra lygi 25°. Kadangi naktį saulė nešviečia, tai mūsų teiginys (1) sąlygai neprieštarauja. Kadangi temperatūra mažesnė už 26°, tai teiginys neprieštarauja ir (2) sąlygai.
Vadinasi, A nebūtinai.
Ar būtinai B? Vėl paėmę dienos temperatūrą 25°, negauname jokios prieštaros.
Ar būtinai C? Sakykime – nebūtinai, ji gali būti 27°. Bet tada pagal (2) sąlygą šviečia saulė, o naktį to būti negali.
Taigi būtinai C. Renkamės atsakymą C.

! Liko įsitikinti, kad nebūtinai D ir nebūtinai E. Jeigu nebūtinai D, tai temperatūra gali būti ir 24°. Tai niekam neprieštarauja.
Įrodysime, kad nebūtinai E: gali būti temperatūra 25°, o saulė nešviesti. Tai jau matėme, kai nakties temperatūra buvo lygi 25°.
Taigi įsitikinome, kad vienintelis įmanomas atsakymas yra C.

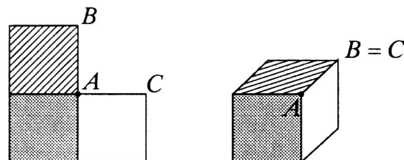
!! Jeigu nakties temperatūra 27°, tai pagal (2) sąlygą šviečia saulė. Bet to naktį nebūna, – prieštara. Vadinasi, nakties temperatūra negali būti 27°, t. y. būtinai C.

K19. Ⓓ



? Aišku, kad jei kurios nors dvi sritys išklotinėje turi bendrą briauną, tai jos turės bendrą tą briauną ir lankstant.
Tikriname atsakymus iš eilės. Figūroje A darykime sieną ▩ priekine. Kai viršutinį kvadratą užlenksime, jis taps viršutine siena ▱, o siena ◪ užlenkta taps kairiąja ▱, taigi jos stovės blogai (kitaip sakant, nuo viršutinio pagrindo kairės briaunos į dešinę bus balta sritis, o į apačią – juoda). Taigi figūra A netinka.
Figūrų B ir E dešinysis baltas kvadratas turi bendrą briauną su juoda sritimi, taigi B ir E netinka.
Figūroje C viršutinį kvadratą darykime viršutiniu pagrindu. Jo dešinė sritis bus balta ir turės bendrą briauną su juoda (viršutine) dešinės sienos sritimi.
Taigi liko figūra D, ir renkamės atsakymą D.

! Padarysime tokią pastabą. Jeigu išklotinėje trys kvadratai stovi „kampu“ (žr. paveikslėlius), tai kube jie susieis viršūnėje, jų statmenos kraštinės AB ir AC sutaps ir bus kubo briauna. Vadinasi, išklotinėje prie tokių kraštinių turi būti tos pačios spalvos sritys. Žvilgterėję į išklotines, iš karto matome, kad taip nėra išklotinėse A, B, C ir E, todėl jos iš karto atkrenta.



Iki pilno sprendimo liko įsitikinti, kad figūra D tikrai tinka. Darykime dešinįjį baltą kvadratą priekine siena □. Tada viršutinė siena bus ▱, dešinioji pereis per horizontalią padėtį ▱ ir nulenkta taps ▱. Kairys baltas kvadratas taps šonine siena ▱. Apatinis baltas kvadratas užlenktas taps apatine siena. Pagaliau kairys kvadratas kartu su apatiniu baltu užiminės tokias padėtis: ◪□, ▱, ▱. Dabar užlenkus juodą-baltą kvadratą, jis taps užpakaline siena ◪. Viršutinė užpakalinė briauna bus tarp dviejų juodų sričių, dešinioji užpakalinė briauna – taip pat.
Teisingas atsakymas D.

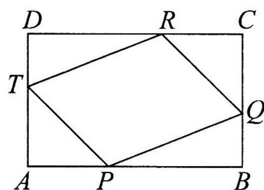
K20. Ⓓ Penkis kartus

? Lengva atspėti, kad Stasiui dabar 6 metai: prieš 3 metus jam buvo 3 metai, po 3 metų jam bus 9 metai, taigi tris kartus daugiau. Todėl po ketverių metų jis turės 10 metų, o prieš ketverius – turėjo 2 metus, t. y. penkis kartus mažiau.
Renkamės atsakymą D.

! Beveik aišku, kad Stasiui dabar gali būti tik 6 metai. Vis dėlto paprasčiausia sudaryti lygtį ir ją išspręsti. Jeigu Stasiui dabar x metų, po trejų metų jam bus $x + 3$ metų, o prieš trejus jam buvo $x - 3$ metų. Todėl $x + 3 = 3(x - 3)$, $2x = 12$, $x = 6$.
Teisingas atsakymas D.

!! Pagalvokime, kiek metų Stasiui buvo prieš 3 metus. Žinoma, kad nuo to momento po 6 metų Stasiui bus tris kartus daugiau metų, todėl 6 metų tarpas lygus dvigubam Stasio metų skaičiui. Vadinasi, prieš 3 metus Stasiui buvo 3 metai, o dabar – 6 metai.

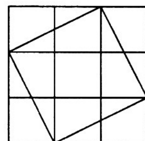
K21. Ⓓ $\frac{5}{9}S_{ABCD}$



? Iš akies matome, kad lygiagretainio plotas didesnis už pusę stačiakampio ploto, taigi atkrenta atsakymai A ir C. Jaučiame, kad $\frac{2}{3}$ per daug, ir reikėtų rinktis iš atsakymų B ir D – iš $\frac{3}{5}$ ir $\frac{5}{9}$. Kadangi stačiakampio kraštinė padalyta į 3 lygias dalis, tai vardiklyje turėtų būti trejetai. Renkamės atsakymą $\frac{5}{9}$, t. y. D.

?? Kadangi spėjame, jog atsakymas nepriklauso nuo stačiakampio matmenų, galima imti kvadratą, pavyzdžiui, 3×3. Vidinio kvadrato (pagaliau net neįdomu, ar tai kvadratas) plotą galima tiksliai surasti remiantis vadinamąja Piko formule: jeigu daugiakampio viršūnės yra gardelės mazguose, tai jo plotas lygus vidinių mazgų skaičiui be vieneto plius pusė krašto mazgų (žr. V. Prasolov, Zadači po planimetrii, II d., Moskva, 1986, p. 165).

Vadinasi, mūsų vidinės figūros plotas lygus $4 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 5$. Kadangi pradinio kvadrato plotas lygus 9, tai renkamės atsakymą D.



??? Dar paprasčiau vidinio kvadrato plotą apskaičiuoti taip. Vienas atmetamas trikampis sudaro pusę stačiakampio 1×2, todėl jo plotas lygus 1. Atmetame 4 trikampius, todėl vidinio kvadrato plotas yra 5, arba $\frac{5}{9}$ didžiojo kvadrato ploto.

! Jau matėme, kad lengviau apskaičiuoti atmetamų trikampių plotą. Pažymėkime stačiakampio kraštines a ir b, tada jo plotas lygus ab. Kiekvieno iš 4 stačiųjų trikampių kraštinės lygios $\frac{2}{3}a$ ir $\frac{1}{3}b$, todėl plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{3}b = \frac{1}{9}ab$, o visų keturių plotas lygus $\frac{4}{9}ab$. Todėl lygiagretainio plotas lygus $ab - \frac{4}{9}ab = \frac{5}{9}ab$.
Teisingas atsakymas D.

!! Niekas nepasikeistų, jei pradinis keturkampis būtų lygiagretainis – atmetamo trikampio plotas lygus $1/9$ lygiagretainio ploto – tai išplaukia iš trikampio ploto formulės $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Beje, ir ta formulė nereikalinga. Pavyzdžiui, trikampio ABD plotas lygus $\frac{1}{2}$ lygiagretainio $ABCD$ ploto, trikampio APD plotas lygus $\frac{1}{3}$ trikampio ABD ploto (nes aukštinė bendra), trikampio APT plotas lygus $\frac{2}{3}$ trikampio APD ploto (nes iš viršūnės P nuleista aukštinė bendra). Taigi $S_{\triangle APT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{9} S_{ABCD}$.

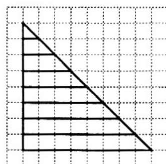
K22. Ⓓ Žali

? Spėjame, kad niekas nepriklauso nuo tvarkos, kuria žirneliai valgomi. Todėl iš pradžių, imdami po 3, „suvalgykime“ baltus žirnelius ($387 : 3 = 129$), po to geltonus, raudonus ir rudus žirnelius. Liks tik žali žirneliai. Kai per 135 kartus suvalgysime 405 žalius žirnelius, liks 2 žali žirneliai. Renkamės atsakymą D.

! Kadangi kiekvieną kartą suvalgomi 3 vienodos spalvos žirneliai, tai kiekvienos spalvos žirnelių skaičiaus dalybos iš 3 liekana nekinta (kartais sakoma – yra invariantas). Todėl žirnelių skaičių dalybos iš 3 liekanos visą laiką bus 0, 0, 0, 2, 0. Vadinasi, kai liko 2 žirneliai, jie buvo žali.
Teisingas atsakymas D.

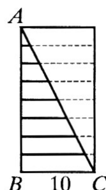
K23. Ⓓ 35

? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo trikampio pavidalo, tai languotame popieriuje braižykime statųjį lygiašonį trikampį, kurio statiniai – 8 langeliai (4 langeliai = 5 ilgio vienetai).
Tada septynių atkarpų ilgiai yra 7, 6, 5, 4, 3, 2 langeliai ir 1 langelis – iš viso $7+6+5+4+3+2+1=28$ langeliai, t. y. 35 ilgio vienetai.
Renkamės atsakymą D.



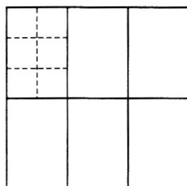
! Galima apskaičiuoti kiekvienos atkarpos ilgį – pavyzdžiui, trumpiausią atkarpą x randame iš proporcijos $x : 10 = 1 : 8$, $x = 10/8 = 5/4$. Tada kitos atkarpos lygios $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $7x$, o jų visų suma lygi $x + 2x + \cdots + 7x = 28x = 28 \cdot \frac{5}{4} = 35$.
Teisingas atsakymas D.

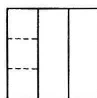
!! Papildome brėžinį iki stačiakampio.
Tada visi atitinkami trikampiai lygūs, todėl lygios ir atitinkamos atkarpos. Bet dviguba atkarpų suma lygi $7 \cdot 10$, todėl ieškomoji suma lygi 35. Beje, niekas nesikeistų, jeigu $\triangle ABC$ nebūtų statusis.



K24. Ⓒ 36

? Galima bandyti viską daryti iš 1 cm aukščio sluoksnių – tada reikia iš stačiakampių 2×3 sudaryti kvadratą. Sudaryti iš jų kvadratą 6×6 paprasta (žr. kairį paveikslėlį).
Tam prireikė 6 kaladėlių. Vadinasi, 6 sluoksniams prireiks $6 \times 6 = 36$ kaladėlių.
Renkamės atsakymą C.





?? Galima pabandyti dėti sluoksnius 2 cm aukščio. Tada iš stačiakampių 1×3 reikia sudaryti kvadratą. Visiškai paprasta sudėti kvadratą 3×3 (žr. dešinį paveikslėlį).
Deja, iš 2 cm aukščio sluoksnių neįmanoma sukrauti 3 cm aukščio bokšto. Vėl, matyt, teks sudarinėti 6 cm kraštinės kubą: iš 4 kvadratų 3×3 sudarome kvadratą 6×6, o tada dedame 3 tokius sluoksnius. Ne geriau ir imti 3 cm aukščio sluoksnį. Tada reikia sudaryti kvadratą iš 1×2 stačiakampių 1×2. Iš dviejų stačiakampių gauname kvadratą 2×2. Bet ir vėl, matyt, teks imti kubo kraštinę 6. Tada viename sluoksnyje bus 18 kaladėlių, o 2 sluoksniuose – 36 kaladėlės.

! Iki griežto įrodymo dar toli: visiškai nebūtinai kubą turime daryti iš sluoksnių – o gal galima sudėti jį ir kitaip. Pagaliau net ir dedant sluoksniais reikia įrodyti, kad, pavyzdžiui, sudėti kvadratą iš stačiakampių 2×3 reikia 6 stačiakampių. Paprasčiausia galvoti taip. Sakykime, kad mums pavyko sudėti kubą iš a kaladėlių. Vienos kaladėlės tūris 6, vadinasi, kubo tūris lygus $6a$. Kita vertus, kubo kraštinė bus sveikasis skaičius b, o tada kubo tūris lygus b^3. Turime lygybę $b^3 = 6a$. Mums reikia rasti mažiausią skaičių a, tenkinantį šią lygybę. Įsivaizduokime, kad skaičių $6a$ ir skaičių b išskaidėme pirminiais dauginamaisiais. Parašytoji lygybė reiškia, kad į sandaugą $6a$ kiekvienas pirminis turi įeiti bent 3 kartus. Kadangi 6 turi daugiklį 2, tai į a būtinai įeina 2^2, o kadangi turi daugiklį 3, tai į a būtinai įeina 3^2. Vadinasi, a yra $2^2 \cdot 3^2 = 36$ kartotinis, iš kurių mažiausias yra 36. Lieka patikrinti, ar iš 36 kubelių tikrai galima sudaryti kubą, bet tai padaryti, kaip jau matėme, nesunku.
Teisingas atsakymas C.

K25. Ⓒ 21

? Čia jau visiškai nieko negalime spėti.

! Skaičiuojame. Vienetas turi tik vieną daliklį – 1, bet šis daliklis nėra tikrinis. Skaičius 2 turi 2 daliklius, bet abu jie nėra tikriniai. Skaičius 3 taip pat turi du daliklius – vienetą ir patį save (tą patį galime pasakyti apie bet kurį pirminį skaičių).
Skaičius 4 turi 3 daliklius: 1, 2 ir 4. Iš jų tik 2 yra tikrinis. Bet net jei jį vadintume „sandauga“, tai $2 \neq 4$.
Skaičius 5 – pirminis.
Skaičius 6 turi du tikrinius daliklius, 2 ir 3, taigi jis tinka: $2 \cdot 3 = 6$ (pirmas ieškomos sekos narys).
Skaičius 7 – pirminis.
Skaičius 8 turi 2 tikrinius daliklius – 2 ir 4, o $2 \cdot 4 = 8$, – tinka (8 – antras sekos narys).
Skaičius 9 turi vienintelį tikrinį daliklį – 3.
Skaičius 10 turi du tikrinius daliklius – 2 ir 5, kurių sandauga lygi 10 (trečias sekos narys).
Skaičius 11 – pirminis.
Skaičius 12 turi tikrinius daliklius 2, 3, 4, 6, bet $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \neq 12$.
Skaičius 13 – pirminis.
Skaičius 14 turi 2 tikrinius daliklius – 2 ir 7, o $2 \cdot 7 = 14$ (skaičius 14 – ketvirtas sekos narys).
Skaičius 15 turi 2 tikrinius daliklius – 3 ir 5, o $3 \cdot 5 = 15$ (skaičius 15 – penktas sekos narys).
Skaičius 16 turi 3 tikrinius daliklius – 2, 4 ir 8, bet $2 \cdot 4 \cdot 8 \neq 16$.
Skaičius 17 – pirminis.
Skaičius 18 turi 4 tikrinius daliklius – 2, 3, 6, 9, bet $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \neq 18$.
Skaičius 19 – pirminis.
Skaičius 20 turi 4 tikrinius daliklius – 2, 4, 5, 10, bet $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \neq 20$.
Skaičius 21 turi 2 tikrinius daliklius – 3 ir 7, o $3 \cdot 7 = 21$ (šeštas sekos narys).
Teisingas atsakymas C.

!! Skaičius 1 turi tik daliklį 1, kuris nėra tikrinis.
Išskaidykime skaičių $n > 1$ pirminių daugiklių sandauga. Jei jis yra pirminis p_1, tai jis turi tik daliklius 1 ir p_1, taigi neturi tikrinių daliklių.
Jeigu skaičiaus n skaidinyje yra vienintelis pirminis daugiklis, įeinantis du kartus, $n = p_1^2$, tai n turi tik vieną tikrinį daliklį p_1, ir $n = p_1^2 \neq p_1$.
Jei skaičiaus n skaidinyje tėra vienas pirminis, įeinantis $k \geqslant 2$ kartų, $n = p_1^k$, tai jo tikriniai dalikliai yra $p_1, p_1^2, p_1^3, \ldots, p^{k-1}$. Kadangi jau $p_1 \cdot p_1^{k-1} = p_1^k = n$, tai p_1^2 turi sutapti su p^{k-1}, t. y. $k - 1 = 2$, $k = 3$. Vadinasi, jei $n = p_1^3$, tai n yra mūsų sekos skaičius.
Sakykime, į skaičių n įeina bent du pirminiai daugikliai, $n = p_1 p_2 k$. Tada jeigu $k > 1$, tai $p_1 k$ ir $p_2 k$ yra tikriniai dalikliai, bet $p_1 k \cdot p_2 k > n$. Jeigu $k = 1$, tai p_1 ir p_2 yra vieninteliai tikriniai daugikliai, $p_1 p_2 = n$, taigi į mūsų seką įeina tik dviejų skirtingų pirminių skaičių (pirmuoju laipsniu) sandaugos.
Taigi mus domina tik pirminių skaičių kubai

$$2^3,\ 3^3,\ 5^3,\ \ldots$$

ir dviejų pirminių skaičių sandaugos

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 7,\ 2 \cdot 11,\ 2 \cdot 13, \ldots, \\ 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 7,\ 3 \cdot 11, \ldots, \\ 5 \cdot 7,\ 5 \cdot 11, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Iš jų sudarome didėjančią seką:

$$\begin{array}{llll} 6 = 2 \cdot 3, & 8 = 2^3, & 10 = 2 \cdot 5, & 14 = 2 \cdot 7, \\ 15 = 3 \cdot 5, & 21 = 3 \cdot 7, & 22 = 2 \cdot 11, & 26 = 2 \cdot 13, \\ 27 = 3^3, & 33 = 3 \cdot 11, \ldots. & & \end{array}$$

Taigi šeštas sekos narys yra 21.

K26. Ⓐ 12

? Galime tikrinti atsakymus. Kadangi jie neišrikiuoti, pradedame nuo A.
Taigi jeigu stačiakampio pradinis ilgis buvo 12 cm, tai jo plotas buvo 12·9. Po pirmo susitraukimo jo plotas buvo 6·6 (tai jau kvadratas, bet tuo pačiu ir stačiakampis). Po antro susitraukimo stačiakampio plotas 3·4 (dabar vargu ar galima 3 vadinti ilgiu, o 4 – pločiu, taigi sakysime, kad jo ilgis 4, o plotis – 3). Po trečio susitraukimo stačiakampio plotas tapo $2 \cdot 2 = 4$. Tai kaip tik ir teigiama sąlygoje.
Renkamės atsakymą A.

! Beveik aišku, kad nesvarbu, kurios kraštinės palikti pusę, o kurios – du trečdalius. Iš tikrųjų, jeigu stačiakampio kraštinės buvo a ir b, tai po pirmo susitraukimo jo plotas tapo $\frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}ab$, t. y. sumažėjo 3 kartus. Vadinasi, po 3 susitraukimų plotas sumažės 27 kartus, o kadangi jis tapo lygus 4 cm, tai iš pradžių jis buvo lygus $4 \cdot 27 = 108\,(\text{cm}^2)$. Vadinasi, kita stačiakampio kraštinė buvo lygi $108 : 9 = 12\,(\text{cm})$.
Kaip ir visus žodinius uždavinius, privalu tikrinti. Taigi tikriname, ar galėjo pradinis stačiakampis būti 12×9. Tada po pirmo susitraukimo jis tapo 6×6, taigi bet kurią kraštinę galime laikyti ilgiu, kitą – pločiu. Po antro susitraukimo ilgesnioji kraštinė sumažėjo pusiau ir pasidarė lygi 3, o trumpesnioji kraštinė sumažėjo trečdaliu ir tapo lygi 4. Vadinasi, stačiakampio ilgis tapo 4, o plotis 3. Po trečio susitraukimo ilgesnioji kraštinė pasidarė 2, o trumpesnioji – irgi 2. Taigi stačiakampio (t. y. kvadrato) plotas tapo lygus 4.
Vadinasi, visi sąlygos reikalavimai išpildyti.
Teisingas atsakymas A.

K27. Ⓒ 21

? Sakykime, kad pamestosios lazdelės ilgis – natūralusis skaičius ir iš visų 6 lazdelių galima sudėti lygiakraštį trikampį. Kadangi perimetras lygus trigubai kraštinei, tai jis turi dalytis iš 3.
Tikrinkime atsakymus. Jeigu teisingas būtų atsakymas A, tai iš visų lazdelių 19, 25, 29, 33, 37, 41 būtų galima sudėti lygiakraštį trikampį. Bet lazdelių ilgių suma lygi $60+54+70$ ir nesidalija iš 3.
Jei būtų teisingas atsakymas B, tai suma padidėtų 1, bet 71 taip pat nesidalija iš 3.
Jei būtų teisingas atsakymas D ar E, tai suma padidėtų dar 2 ar 3, bet 73 ir 74 nesidalija iš 3.
Renkamės atsakymą C.

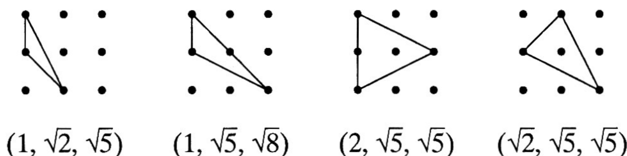
! Liko įrodyti, kad iš lazdelių 21, 25, 29, 33, 37, 41 galima sudėlioti lygiakraštį trikampį. Bet tai akivaizdu: užtenka imti kraštines $21+41$, $25+37$, $29+33$.
Teisingas atsakymas C.

!! Išspręskime uždavinį, jeigu neduoti jokie atsakymai.
Pažymėkime pamestosios lazdelės ilgį x. (Sąlygoje nepasakyta, kad x – sveikasis skaičius, bet tai beveik akivaizdu: x bus tik vienoje kraštinėje, kitose bus tik sveikieji skaičiai, vadinasi, kraštinės ilgis – sveikasis skaičius. Pagaliau x yra perimetro ir kitų penkių lazdelių ilgių sumos skirtumas, – taip pat sveikasis skaičius. Tiesa, šiuo faktu sprendime net nesiremiama.) Pagal sąlygą iš šešių skaičių 25, 29, 33, 37, 41 ir x galima sudaryti tris lygias sumas.
Į vieną sumą negali įeiti daugiau kaip du dėmenys. Iš tikrųjų, jeigu į sumą įeitų bent 3 dėmenys, tai ji būtų ne mažesnė už $x+25+29 > 54$. Bet tada iš likusių dviejų sumų vienoje bus vienas dėmuo, didesnis už 54, vadinasi, tai dėmuo x, ir $x > 54$. Bet tada 3 dėmenų suma būtų $\geqslant 25+29+33 = 87$, o toje iš kitų dviejų sumų, kurioje nėra x, bus daugiausiai $37+41 = 78$, – prieštara.
Vadinasi, į kiekvieną sumą įeina po du dėmenis. Išmetus sumą, į kurią įeina x, gausime dvi lygias sumas, sudarytas iš 4 skaičių, paimtų iš penketuko 25, 29, 33, 37, 41. Pasižiūrėkime, kaip tai įmanoma padaryti.
Jeigu į ketvertuką neįeina 25, tai 29 gali būti poroje tik su 41 – kitaip antra suma didesnė, tada $29+41 = 70$, $33+37$, ir $x+25 = 70$, $x = 45$.
Jei į ketvertuką įeina 25, tai 25 negali būti poroje nei su 29, nei su 33, – kitaip antra pora didesnė. Jei 25 bus poroje su 37, gausime $25+37 = 62 = 29+33$, ir $x+41 = 62$, $x = 21$. Jei 25 bus

poroje su 41, tai $25 + 41 = 66 = 29 + 37$, ir $x + 33 = 66$, $x = 33$ (sąlyga nedraudžia, kad dvi lazdelės būtų vieno ilgio).
Gavome tris sprendinius – pamestosios lazdelės ilgis galėjo būti 21, 33 arba 45.

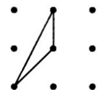
K28. Ⓓ 4

? Paspėliojus lengva rasti 4 skirtingus trikampius:

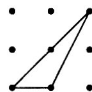


Renkamės atsakymą D.

! Svarbiausia susigalvoti nagrinėjimo sistemą ir nepraleisti nė vieno nestačiojo trikampio.
Trikampio visos 3 viršūnės negali būti kvadrato 2×2 kampuose – kitaip jis būtų statusis.
Todėl užtenka išnagrinėti 2 atvejus: 1) bent viena viršūnė yra kvadrato centre; 2) nėra viršūnės kvadrato centre, bet bent viena viršūnė yra kraštinės viduryje. Įsiveskime tokią koordinačių sistemą, kad kairiojo apatinio taško koordinatės būtų (0; 0), o centrinio – (1; 1), ir išnagrinėkime abu atvejus.



1) Viršūnė yra taške (1; 1). Sakykime, kad yra viršūnė kvadrato kampe – galime laikyti, kad tai taškas (0; 0). Dėl simetrijos galime trečios viršūnės ieškoti tik virš įstrižainės (0; 0)—(2; 2). Bet (0; 1) ir (0; 2) duoda stačiuosius trikampius, taigi tinka tik trečia viršūnė (1; 2).
Jeigu trikampio viršūnės kvadrato kampe nėra, tai kitos dvi viršūnės bus kvadrato kraštinių vidurio taškai, ir gausime statųjį trikampį.
2) Viršūnė yra kraštinės viduryje, sakykime, taške (1; 0). Dėl simetrijos antros viršūnės galima ieškoti tiesėje $x = 1$ arba jos kairėje.



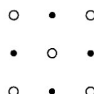
Jeigu antra viršūnė yra taške (0; 0), tai trečia viršūnė negali būti nei pirmoje, nei antroje vertikalėje. Jei tai taškas (2; 1), tai tokį trikampį jau turime, jeigu tai taškas (2; 2), tai gauname naują trikampį.



Jeigu antra viršūnė yra taške (0; 1), tai trečia viršūnė negali būti (0; 0) (trikampis statusis); jei tai taškas (0; 2), tai tokį trikampį turime; jei trečia viršūnė (1; 2), tai trikampis statusis; jei tai taškas (2; 0) – tokį trikampį turime; jei (2; 1) – trikampis statusis; jei tai taškas (3; 3) – gauname naują trikampį.
Jeigu antra viršūnė yra taške (0; 2), tai trečia viršūnė negali būti (0; 0) (trikampis statusis); jei tai (0; 1) – tokį trikampį jau turėjome; jei (1; 2) – trikampis statusis; jei (2; 0) – trikampį jau turėjome; jei (2; 1) – trikampį jau turėjome; jei (2; 2) – gavome naują trikampį.
Pagaliau jeigu antra viršūnė yra taške (1; 2), tai bet kuri trečia viršūnė duoda statųjį trikampį.
Taigi iš viso turime 4 skirtingus trikampius, ir teisingas atsakymas D.

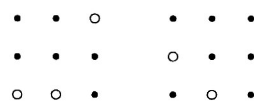
!! Pagal Pitagoro teoremą nesunku apskaičiuoti gautųjų trikampių kraštines:

$$(1, \sqrt{2}, \sqrt{5}),\ (1, \sqrt{5}, \sqrt{8}),\ (\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}),\ (2, \sqrt{5}, \sqrt{5})$$



Be to, nurodysime subtilesnę perranką. Galime teigti, kad bet kuris nestatusis trikampis turi bent vieną viršūnę kraštinės viduryje. Iš tikrųjų, jeigu tarsime, kad visos trys viršūnės yra kvadrato centre arba viršūnėse (žr. paveikslėlį),

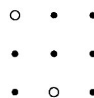
tai galima gauti tik statųjį trikampį. Vadinasi, perranką užtenka atlikti, kai viena viršūnė yra kraštinės viduryje. Dėl simetrijos galima laikyti, kad ta viršūnė yra taškas (1; 0). Kadangi abi likusios viršūnės negali būti antroje vertikalėje, tai remiantis simetrija galima laikyti, kad antra viršūnė yra pirmoje vertikalėje.



Dabar perranka nebedidelė. Jeigu ji yra (0; 0) (žr. kairį paveikslėlį), tai trečia viršūnė nebus nei pirmoje, nei antroje vertikalėje (tada trikampiai statieji), todėl tiks (2; 1) (trikampis $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$) ir (2; 2) (trikampis $(1, \sqrt{5}, \sqrt{8})$).

Jeigu antra viršūnė yra (0; 1) (žr. dešinį paveikslėlį), tai trečia viršūnė (0; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 1) duoda stačiuosius trikampius; viršūnė (0; 2) ir viršūnė (2; 0) duoda trikampius $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$; viršūnė (2; 2) duoda naują (trečią) trikampį $(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5})$.

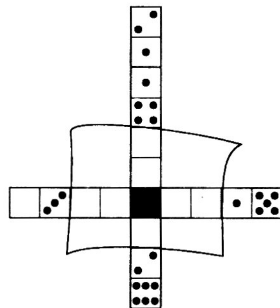
Jeigu antra viršūnė yra (0; 2), tai (žr. paveikslėlį dešinėje) trečia viršūnė gali būti: (1; 1) (viršūnes (0; 0) ir (0; 1) jau perrinkome), tada gauname jau turėtą trikampį $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$;



trečia viršūnė (1; 2) duoda statųjį trikampį; trečia viršūnė (2; 0) duoda jau turėtą trikampį $(1, \sqrt{5}, \sqrt{8})$; trečia viršūnė (2; 1) duoda jau turėtą trikampį $(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5})$; trečia viršūnė (2; 2) duoda naują (ketvirtą) trikampį $(2, \sqrt{5}, \sqrt{5})$.

K29. Ⓑ 3

? Sprendžiant šį uždavinį reikia žinoti, kad domino kauliukai yra stačiakampiai ▭▭, kurių kiekvienoje pusėje yra nuo 1 iki 6 akių, o žaidžiant jie dedami taip, kad prie dviejų kauliukų bendros briaunos akučių skaičius būtų tas pats.
Tikrinkime atsakymus. Jeigu atsakymas A (juodas langelis 2), tai į dešinę turėtų būti kauliukas (2, 1), bet jis jau yra viršuje – prieštara.
Jeigu teisingas atsakymas B (juodas langelis 3), tai į apačią kauliuko (3, 2) langelis yra 2 (jo viršutinis langelis ir yra uždengtasis langelis). Tada į dešinę nuo užtušuoto langelio padėtas kauliukas (3, 1), į kairę – (3, 3), į viršų (3, 4), ir niekas tam neprieštarauja.
Renkamės atsakymą B.



! Spręskime uždavinį, kai atsakymai nenurodyti.
Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 0 taškų. Tada į kairę turi būti padėtas kauliukas (3, 0), bet tas kauliukas jau padėtas kairiau.
Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 1 taškas. Tada į viršų eitų kauliukas $\binom{4}{1}$. Bet toks kauliukas jau panaudotas.
Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 2 taškai. Tada į dešinę būtų kauliukas (2, 1), bet jis jau padėtas viršuje.
Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 3 taškai. Tada į apačią yra 2 taškai (t. y. kauliuko viršus – 3 taškai, apačia – 2 taškai), į dešinę – kauliukas (3, 1), į viršų – kauliukas $\binom{4}{3}$, į kairę – kauliukas (3, 3). Taigi turime vieną sprendinį.
Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 4 taškai. Tada į dešinę turėtų būti kauliukas (4, 1), bet jis jau padėtas aukštyn.
Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 5 taškai. Tada į dešinę turėtų būti kauliukas (5, 1), bet jis jau padėtas toliau į dešinę.
Tarkime, kad užtušuotame langelyje yra 6 taškai. Kadangi į apačią bus langelis 2, taigi tas kauliukas yra $\binom{6}{2}$. Bet tas kauliukas jau panaudotas apačioje.
Taigi atsakymas vienintelis – užtušuotame langelyje gali būti tik 3 taškai.

!! Pabandykime sprendimą surašyti trumpiau.
Jei iš dešinės yra kauliukas (0, 1), tai juodas – 0, iš kairės kauliukas (3, 0), bet jis jau yra kairiau.

Jei iš dešinės yra kauliukas (1, 1), tai į apačią – kauliukas $\binom{1}{2}$, bet toks kauliukas jau padėtas.

Jei iš dešinės kauliukas (3, 1), tai į apačią – kauliukas $\binom{3}{2}$, į viršų – kauliukas $\binom{4}{3}$, į kairę – kauliukas (3, 3), ir tokia padėtis galima.

Pagaliau jei iš dešinės padėtas kauliukas (6, 1), tai į apačią turėtų būti kauliukas $\binom{6}{2}$, bet jis jau padėtas apačioje.
Vadinasi, vienintelis galimas variantas – juodajame kvadratėlyje yra 3 akutės.

K30. Ⓒ 6

? Reikia nustatyti skaičiaus $0{,}2^{2000}$ paskutinį skaitmenį. Kadangi 2 keliant laipsniu galimos galūnės 2, 4, 8, 6, tai spėlioti nėra ko.

! Kadangi galūnės 2, 4, 8, 6 kartojasi periodiškai – kas 4, tai $0{,}2^{2000}$ galūnė bus tokia pat kaip ir $0{,}2^4$, t. y. 6.
Teisingas atsakymas C.

!! Skaičių $0{,}2^{2000}$ galima užrašyti taip: $(0{,}2^4)^{500}$. Skaičius $0{,}2^4$ baigiasi 6, o tokį skaičių keliant laipsniu paskutinis skaitmuo nekinta.
Ir iš viso, iš dešimtainių trupmenų daugybos taisyklių išeina, kad užtenka nagrinėti skaičių 2^{2000}.

JUNIORAS (IX ir X klasės)

J1. Ⓐ Pirmadienį

? Tikrinkime atsakymus.
Jeigu būtų teisingas atsakymas A ir tai buvo pirmadienį, tai triušis melavo. Todėl 1) sekmadienį jis nemelavo, 2) trečiadienį ir ketvirtadienį jis nemeluos. Bet trečiadieniais triušis meluoja, taigi atsakymą A atmetame.
Jeigu būtų teisingas atsakymas B ir tai buvo antradienį, tai triušis melavo. Todėl 1) pirmadienį jis nemelavo. O tai neteisybė. Atsakymą B atmetame.
Jeigu būtų teisingas atsakymas C ir tai buvo trečiadienį, tai triušis melavo. Todėl 1) antradienį jis nemelavo. O tai neteisybė. Atsakymą C atmetame.
Jeigu būtų teisingas atsakymas D ir tai buvo ketvirtadienį, tai triušis nemelavo. Todėl 1) trečiadienį jis melavo (ir tai teisybė), 2) šeštadienį ir sekmadienį jis meluos (o tai neteisybė). Atmetame atsakymą D.
Jeigu būtų teisingas atsakymas E ir tai buvo penktadienį, tai triušis nemelavo. Todėl 1) ketvirtadienį jis melavo. O tai neteisybė. Atmetame atsakymą E.

! Spėliodami atmetėme visus atsakymus. Vis dėlto „Kengūros“ konkurso taisyklės garantuoja, kad iš nurodytų atsakymų vienas (ir tik vienas) teisingas. Žinoma, gyvenime ko neatsitinka – ir uždavinių sąlygose klaidų gali pasitaikyti, bet tuo nesinorėtų tikėti.
Įdėmiai peržiūrėkime atsakymus iš naujo. Dėl kitų atsakymų abejonių kaip ir nekyla, o štai atsakymas A iš tikrųjų reiškia ne tai, kad jis trečiadienį ir ketvirtadienį nemeluos, o tai, kad teiginys, jog jis meluos trečiadienį ir ketvirtadienį, yra neteisingas.
Iš tikrųjų, triušis trečiadieniais meluoja, o ketvirtadieniais nemeluoja. Taigi tarsi pusė teiginio teisinga, o pusė neteisinga.
Bet paklauskime save taip:
Ar teisingas teiginys, jog triušis meluos trečiadienį ir ketvirtadienį?
Mes priversti atsakyti, kad teiginys neteisingas. (Beje, ir kasdieniniame gyvenime melagiu vadiname žmogų, kuris *kartais* meluoja.) Taigi renkamės atsakymą A.

!! Iš esmės jau išsiaiškinome, kas yra sudėtinio teiginio neiginys. Jeigu turime teiginį A, tai jo neiginys yra „ne A“, kuris dažniausiai žymimas $\overline{A}$. Teiginio B neiginys yra „ne B“ (kitaip $\overline{B}$). O štai teiginio „A ir B“ neiginys yra „arba ne A, arba ne B“. Formule tai užrašome taip: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.
Beje, dar nepatikrinome nenurodytų atsakymų F „šeštadienį“ ir G „sekmadienį“. Bet nesunku įsitikinti, kad ir jie netinka.
Jeigu tai vyko šeštadienį, tai triušis nemelavo, ir atsakymas G reiškia, kad 1) penktadienį triušis melavo, o tai neteisybė (kad ir koks – teisingas ar neteisingas – būtų 2) teiginys).
Jeigu tai vyko sekmadienį, tai triušis nemelavo, ir atsakymas F reiškia, kad 1) šeštadienį triušis melavo, o tai neteisybė. Taigi net jeigu uždavinyje nebūtų nurodyti atsakymai ir būtų paklausta, kurią savaitės dieną tai įvyko, tai vienintelis teisingas atsakymas būtų A, t. y. pirmadienį.

J2. Ⓓ 1

? Aišku, kad 0 (atsakymas E) netinka, nes nei vienas dauginamasis nelygus 0.
Kadangi $2 < \sqrt{5} < 3$, tai dauginamasis $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{2000}$ mažesnis už 1. Pirmas daugiklis mažesnis už $(\frac{3+1}{2})^{200}$, todėl atsakymai A ir B taip pat netinka, nes net mažesnis iš skaičių $\frac{5^{200}-1}{4}$ per didelis:

$$\frac{5^{200}-1}{4} > \frac{5 \cdot 5^{199}-1}{4} > \frac{5 \cdot 5^{199} - 5^{199}}{4} = \frac{4 \cdot 5^{199}}{4} = 5^{199} > 4^{199} = 2^{398}.$$

Renkamės atsakymą D.

! Žinoma, geriausia skaičiuoti. Kadangi $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{(\sqrt{5})^2-1^2}{4} = \frac{5-1}{4} = 1$, tai ir pakelta 200-tuoju laipsniu ta sandauga lygi 1.

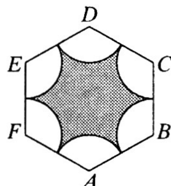
J3. Ⓔ 12

M	B	R
R	M	B
B	R	M

? Spėti čia sunkoka, nors iš karto aišku, kad jau pirmą eilutę galima užpildyti šešiais būdais. Kadangi antrą eilutę galima pildyti irgi keliais būdais, tai panašu, kad būdų ne mažiau kaip 12. Renkamės atsakymą E.

! Pirmą eilutę galima užpildyti šešiais būdais (galima abėcėliškai surašyti visus būdus – BMR, BRM, MBR, MRB, RBM, RMB, o galima remtis ir kombinatorikos daugybos taisykle: į pirmą langelį raidę įrašyti galima 3 būdais, tada nepriklausomai nuo pirmos raidės į antrą langelį raidę galima įrašyti 2 būdais, o į trečią – likusią raidę vieninteliu būdu, taigi visas 3 raides įrašyti galima $3\cdot2\cdot1 = 6$ būdais).
Kad ir kaip raides būtume surašę į pirmą eilutę, antrą eilutę galima užpildyti tik 2 būdais (į pirmą langelį galima rašyti bet kurią raidę, išskyrus tą, kuri yra aukščiau; liks dvi raidės, bet viena iš jų sutampa su parašyta pirmos eilutės antrame ir trečiame langelyje, ir ją teks rašyti kitame stulpelyje; trečia raidė sutampa su pirmos eilutės pirmo langelio raide, taigi parašyta į likusią vietą ji nesutaps su atitinkama pirmos eilutės raide).
Vadinasi, pirmas dvi eilutes remiantis daugybos taisykle galima užpildyti 12 būdų. Pildant trečią eilutę jokio pasirinkimo nebelieka: kiekviename stulpelyje jau parašytos dvi raidės, taigi teks rašyti trečiąją. Teisingas atsakymas E.

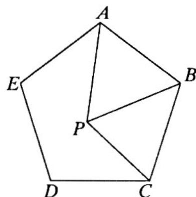
J4. Ⓑ 12π



? Iš akies matyti, kad apskritimo lanko ilgis maždaug lygus dviem pusėms šešiakampio kraštinės. Todėl atsakymas turėtų būti artimas 36. Artimiausias iš jų skaičiui 36 yra 12π.
Renkamės atsakymą B.

! Kadangi apskritimo išpjovos kampas lygus 120°, tai sudėję tris išpjovas gausime visą apskritimą, kurio ilgis $2\pi \cdot 3 = 6\pi$ (apskritimo spindulys lygus pusei šešiakampio kraštinės, t. y. 3). Todėl visų šešių lankų ilgis lygus 12π.
Teisingas atsakymas B.

J5. Ⓓ 66°



? Vizualiai visiškai aišku, kad lygūs kampai BCP ir BPC „truputį“ didesni už PBC (ypač gerai matyti, kad kraštinė BC ilgesnė už PC). Visų minėtų trijų kampų suma lygi 180°. Vadinasi, kampas BCP „truputį“ didesnis už 60°.
Renkamės atsakymą D.

! Nesunku kampus ir suskaičiuoti. Penkiakampio kampų suma lygi $3 \cdot 180° = 540°$ (įsivaizduokime, kad tašką P sujungiame su E ir su D; gausime 5 trikampius, kurių kampų suma 900°, o atmetus pilnutinį kampą P, t. y. 360°, turėsime penkiakampio kampų sumą 540°). Todėl $\angle ABC = 540° : 5 = 108°$. Vadinasi, $\angle PBC = 108° - 60° = 48°$, o $\angle BCP = (180° - 48°)/2 = 90° - 24° = 66°$.

J6. Ⓐ 14

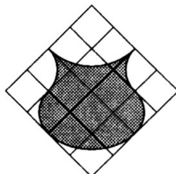
? Spėti čia sunku. Bandykime tikrinti atsakymus.
Kadangi atsakymai surašyti didėjimo tvarka, tai pradėkime nuo vidurio.
Jeigu kambaryje buvo 16 asmenų, tai jų amžių suma buvo $16\cdot16 = 256$. Įėjus dar vienam asmeniui, amžių suma tapo lygi $256 + 29 = 285$, bet ji iš 17 nesidalija.
Jeigu iš pradžių buvo 15 asmenų, tai jų amžių suma buvo $15 \cdot 15 = 225$, o padidinta tapo lygi $225 + 29 = 254$, ir iš 16 nesidalija (nesidalija net iš 4).
Jeigu iš pradžių buvo 14 asmenų, tai jų amžių suma buvo $14\cdot14 = 196$, o padidėjusi tapo $196+29 = 225$. Ir iš tikrųjų, tada jų amžiaus vidurkis $225 : 15 = 15$ tikrai lygus asmenų skaičiui.
Renkamės atsakymą A.

! Sakykime, kad iš pradžių asmenų buvo x, tada jų amžių suma buvo lygi x^2. Kai asmenų vienu padaugėjo ir pasidarė $x+1$, tai jų suma tapo $(x+1)^2$. Sudarome lygtį:

$$(x+1)^2 - x^2 = 29, \quad 2x+1 = 29, \quad x = 14.$$

Teisingas atsakymas A.

J7. Ⓐ $32\,\mathrm{cm}^2$



? Kvadrato plotas lygus $8 \times 8 = 64\,(\mathrm{cm}^2)$. Vizualiai atrodo, kad „ąsočio" plotas didesnis už pusę kvadrato ploto. Vis dėlto tokio atsakymo nėra, tad tenka rinktis didžiausią iš atsakymų.
Renkamės atsakymą A.

?? „Ąsočio" plotą apytiksliai galima suskaičiuoti pagal taisyklę: imame pilnų kvadratėlių plotą plius pusę nepilnų kvadratėlių ploto. Taigi plotas apytiksliai lygus $3 \times 4 + 10 \times 2 = 32\,(\mathrm{cm}^2)$.
Renkamės atsakymą A.

! Padalykime kvadratą į keturis lygius mažesnius kvadratus. Tada ąsočio dalį, priklausančią viršutiniam kvadratui, galime perkelti į apatinio kvadrato neužtušuotą dalį, o kairiajam kvadratui priklausančią ąsočio dalį – simetriškai kvadrato centro atžvilgiu (t. y. apvertus) perkelti į dešiniojo kvadrato neužtušuotą dalį. Tada bus visiškai užpildyti 8 kvadratėliai, taigi teisingas atsakymas A.

!! Galima ir apskaičiuoti ąsočio dalių plotus. Pavyzdžiui, viršutiniam iš 4 minėtų kvadratų priklausančios ąsočio dalies plotas lygus kvadrato ir ketvirtadalio skritulio skirtumui, t. y. $4^2 - \pi \cdot 4^2/4 = 16 - 4\pi$. Apatiniam kvadratui priklausančios dalies plotas yra skritulio ketvirtadalis, $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$. Kairiajam (taip pat ir dešiniajam) kvadratui priklausančio ąsočio dalis sudaryta iš kvadratėlio, kvadratėlio minus skritulio ketvirtis ir skritulio ketvirčio, taigi jos plotas lygus $2 \cdot 4 = 8$. Vadinasi, ąsočio plotas lygus $16 - 4\pi + 4\pi + 2 \cdot 8 = 32\,(\mathrm{cm}^2)$.

J8. Ⓐ 10

? Spėti čia neverta.

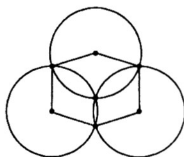
! Užrašykime sąlygą $p(3) = 0$: $3^5 + 3b + c = 0$. Kadangi $c = -3(3^4 + b)$, tai c turi dalytis iš 3. Vadinasi, c negali būti 10.
Renkamės atsakymą A.

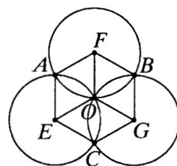
!! Įsitikinkime, kad visos kitos c reikšmės įmanomos. Iš tikrųjų, $c = 12$, jeigu $3^4 + b = -4$, t. y. $b = -85$; $c = 15$, jei $3^4 + b = -3$, $b = -84$; $c = 36$, jei $3^4 + b = -12$, $b = -93$; $c = 9$, jei $3^4 + b = -3$, $b = -84$.
Beje, jeigu nebūtų duoti atsakymai ir būtų klausiama, kokios galimos ir kokios negalimos c reikšmės, tai atsakymas būtų toks: galimos visos c reikšmės, dalios iš 3; negalimos visos c reikšmės, kurios nesidalija iš 3.
Iš tikrųjų, jau matėme, kad c turi dalytis iš 3. O jeigu jau $c = 3k$, tai užtenka imti $k = -3^4 - b$.

J9. Ⓒ 0

? Iš brėžinio spėjame, kad EF ir AB lygios.
Renkamės atsakymą C.

! Aišku, mūsų spėjimas labai jau rizikingas.
Visų pirma pabandykime išsiaiškinti sąlygą. Ką reiškia „apskritimai išsidėstę simetriškai"? Ar simetriškai išsidėstę apskritimai, pavaizduoti dešinėje?





Matyt, ne, – greičiausiai visos trys bendros dviejų apskritimų dalys turi būti vienodos, o kitaip sakant – trikampis EFG (G – trečio apskritimo centras) turi būti lygiakraštis. O ar vienintelė tokia trijų apskritimų padėtis? Atrodytų, vėlgi ne, – bendros dalys tarsi gali būti „storesnės" ir „plonesnės".

Ir vis dėlto pradėkime skaičiuoti. Aišku, kad $EOFA$, $BFOG$, $GOEC$ – rombai (jų kraštinės lygios r). Kadangi EF, FG ir GE lygios, tai ir trikampiai EOF, FOG, OGE lygūs. Kampai EOF, FOG, OGE lygūs ir kartu sudaro 360°, todėl kiekvienas jų lygus 120°. Vadinasi, $\angle AFO = 60°$, todėl $\triangle AOF$ (ir visi kiti trikampiai) lygiakraščiai, o šešiakampis $AFBGCE$ taisyklingas. Todėl jo trumposios įstrižainės AB ir EF lygios. (Žinoma, AB ir EF lygumas išplaukia ir iš trikampių EOF ir AOB lygumo, kurie lygūs pagal 120° kampą ir juos sudarančias kraštines.)
Vadinasi, teisingas atsakymas C.

!! Kartu išsiaiškinome, kad uždavinio situaciją atitinka vienintelė konstrukcija. Tai reiškia štai ką. Kai duotas spindulys r, brėžiame apskritimą su centru E, pasirenkame tašką A, nuo jo tiek pat išskėtę skriestuvą atidedame apskritime taškus O ir C. Po to viskas eina vienareikšmiškai. Iš taškų A ir O nubrėžę lankelius randame centrą F, o iš taškų O ir C nubrėžę lankelius – centrą G. Dabar jau galime nubrėžti antrą ir trečią apskritimą.
Beje, nesunku ir apskaičiuoti EF ilgį, pavyzdžiui, kaip dvigubą trikampio AFO aukštinę. Bet paprasčiausia tai padaryti iš lygiagretainio $EAFO$ remiantis įstrižainių savybe: $4r^2 = r^2 + EF^2$, $EF = r\sqrt{3}$.

J10. Ⓑ 0

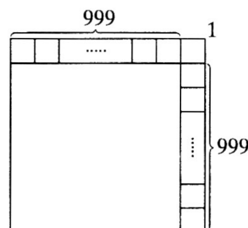
? Matome, kad $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $S_3 = 2$, $S_4 = -2$, taigi $S_1 + S_2 = 0$, $S_3 + S_4 = 0$. Spėjame, kad ir $S_{1999} + S_{2000} = 0$.
Renkamės atsakymą B.

! Labai lengva apskaičiuoti S_{2000}: $S_{2000} = \underbrace{1-2}+\underbrace{3-4}+\cdots+\underbrace{1999-2000} = -1000$. Todėl $S_{1999} = S_{2000} + 2000 = -1000 + 2000 = 1000$, o $S_{1999} + S_{2000} = 1000 + 1000 = 0$.
Teisingas atsakymas B.

!! Lygiai taip pat įsitikiname, kad $S_{2n} = -n$, $S_{2n-1} = n$.
Beje, įdomu užrašyti formulę S_k, kuri tiktų tiek lyginiam, tiek nelyginiam k. Tai nesunku padaryti, naudojantis sveikosios dalies simboliu [ ]: $S_k = (-1)^{k+1}[\frac{k+1}{2}]$. Iš tikrųjų, kai $k = 2n$, gausime $S_{2n} = -[n + \frac{1}{2}] = -n$, o kai $k = 2n - 1$, tai $S_{2n-1} = n$.
Dar įdomiau, kad galima apsieiti ir be sveikosios dalies simbolio:

$$S_k = \frac{(2k+1)(-1)^{k+1} + 1}{4}.$$

J11. Ⓒ 1 000 000



? Iš karto ateina į galvą mintis, kad nuo didžiojo kvadrato viršaus ir dešinės galima nukirpti vienetinio pločio juosteles. Jeigu tos juostelės turi 999+1+999 vienetinius kvadratėlius, tai atsakymas atspėtas: mažojo kvadrato plotas lygus 999^2 (ir nelygus vienetui, kaip reikalauja sąlyga), o didžiojo – lygus 1000^2.
Renkamės atsakymą C.

! Įrodysime, kad daugiau sprendinių uždavinys neturi.
Tarkime, kad mums pavyko padalyti kvadratą K reikiamu būdu. Kvadrato K kraštinę pažymėkime y, mažojo kvadrato kraštinę x (brėžinio visai nereikia – tas mažesnysis kvadratas gali būti bet kur).

Didžiojo kvadrato plotas lygus mažojo kvadrato plotui plius 1999, taigi gauname lygtį

$$y^2 = x^2 + 1999, \quad (y-x)(y+x) = 1999.$$

Pagalvokime, kaip skaičių 1999 galima išskaidyti į dviejų daugiklių sandaugą. Tam reikia rasti visus 1999 daliklius.
Skaičius 1999 nesidalija iš 2, iš 3, iš 5, iš 7. Kyla mintis, kad jis pirminis – bet tai reikėtų įrodyti (bent sau – pirminių skaičių lentelės niekas nesinešioja). Vadinasi, reikėtų tikrinti, ar 1999 nesidalija iš jokio pirminio, mažesnio už jį. Bet net išrašyti tuos pirminius sunku (kas žino, ar, pavyzdžiui, 997 pirminis, ar ne). Taigi atrodytų, kad su įrodymu bus daug vargo, bet vis dėlto taip nėra. Tarkime, kad 1999 dalijasi iš a, o padaliję gauname skaičių b, t. y. $a \cdot b = 1999$. Niekas netrukdo mums laikyti $a \leqslant b$; tada $a < 44$ (iš tikrųjų, jeigu $b \geqslant a \geqslant 45$, tai sandauga ab būtų didesnė už 2025). Vadinasi, užtenka išsiaiškinti, ar skaičius 1999 turi daliklių, mažesnių už 44, t. y. užtenka patikrinti, ar 1999 dalijasi iš pirminių skaičių, mažesnių už 44. Tokius skaičius išrašyti lengva:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.$$

Pradžia jau padaryta – sekantis skaičius 11. Bet 1999 nesidalija iš 11 (99 galime atmesti, o $1900 = 19 \cdot 100$ iš 11 nesidalija). Nesidalija 1999 ir iš 13 (39 galime atmesti, lieka $196 \cdot 10$; 196 iš 13 nesidalija, nes 26 galime atmesti, o $170 = 17 \cdot 10$ iš 13 nesidalija). Žodžiu, tiesiog dalydami ar pagudraudami įsitikiname, kad skaičius 1999 nesidalija nė iš vieno išrašytų pirminių ir todėl yra pirminis.
Grįžkime prie lygties. Kadangi 1999 natūraliaisiais daugikliais galima išskaidyti tik vienu būdu: $1 \cdot 1999$, o daugiklis $y - x < y + x$, tai $y - x = 1$, $y + x = 1999$; vadinasi, $y = 1000$, $x = 999$.
Dabar negalima pamiršti, kad buvome pasakę „tarkime“. Taigi įrodėme tik tiek: jeigu kvadratą galima padalyti į mažesnius, tai tik taip, kad mažesniojo kraštinė būtų 99, o vienetinių kvadratėlių būtų 1999. Bet tai, kad lygtis turi sprendinių, dar visai neįrodo, kad kvadratą galima padalyti į mažesnius. Todėl reikia sugalvoti konstrukciją, kuri tenkintų uždavinio sąlygą. Bet tokią konstrukciją nurodėme jau anksčiau (uždavinyje visiškai neprašoma įrodyti, kad tokia konstrukcija vienintelė; šį teiginį, jei įdomu, įrodykite patys – tai nėra sunku). Išsamus sprendimas baigtas.
Teisingas atsakymas C.

J12. Ⓓ 13

? Čia tikrai nieko neatspėsi – reikia skaičiuoti.

! Iš trečios sąlygos išplaukia, kad x teigiamas. Taigi x ir y – natūralieji skaičiai, tenkinantys tris sąlygas:
1) x lyginis; 2) y pirminis; 3) $x^2y < 100$.
Perranką patogiausia pradėti nuo y.
Jei $y = 2$, tai $x^2 < 50$, $x = 2, 4, 6$.
Jei $y = 3$, tai $x^2 < 34$, $x = 2, 4$.
Jei $y = 5$, tai $x^2 < 20$, $x = 2, 4$.
Jei $y = 7$, tai $x^2 < 15$, $x = 2$.
Jei $y = 11, 13, 17, 19, 23$, tai $x^2 < 10$, ir $x = 2$.
Jei $y \geqslant 29$, tai $x^2 < 4$, ir sprendinių nėra.
Radome 13 porų: (2, 2), (4, 2), (6, 2), (2, 3), (4, 3), (2, 5), (4, 5), (2, 7), (2, 11), (2, 13), (2, 17), (2, 19), (2, 23).
Teisingas atsakymas D.

J13. Ⓓ 28

? Kadangi už teisingą atsakymą Jolanta gauna 1/2 lito, tai ji teisingai išsprendė lyginį uždavinių skaičių – atsakymai A, C, E atkrenta. Tikriname atsakymą B – tada Jolanta teisingai išsprendė 26 uždavinius, neteisingai 14, taigi gavo $26 \cdot 1/2 - 14 \cdot 1 = -1$ litą.
Renkamės atsakymą D.

! Atsakymas D tikrai tinka: $28 \cdot 1/2 - 12 \cdot 1 = 2$ litai. Kadangi didėjant išspręstų uždavinių kiekiui užmokestis didėja, tai tas sprendinys vienintelis. Tinka tik atsakymas D.

!! Galima sudaryti lygtį: jei Jolanta teisingai išsprendė x uždavinių, tai neteisingai $40 - x$, todėl $x \cdot 1/2 - (40 - x) \cdot 1 = 2$, $x - 80 + 2x = 4$, $3x = 84$, $x = 28$. Taigi Jolanta teisingai išsprendė 28 uždavinius.

J14. Žr. uždavinio K16 sprendimą.

J15. Ⓔ 72 kg

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, tai pradėkime tikrinti nuo vidurio.
Sakykime, kad Liucija sveria 64 kg. Svarstyklės parodė 67 kg, vadinasi, jos rodo 3 kg daugiau. Todėl Roma sveria $59 - 3 = 56$ (kg). Abi jos sveria $64 + 56 = 120$ (kg), taigi svarstyklės turėtų rodyti 123 kg. Vadinasi, atsakymas C netinka.
Tarsi reikia imti didesnį atsakymą – tikrinkime D. Tada svarstyklės rodytų $70 - 67 = 3$ kilogramais mažiau, Roma svertų $59 + 3 = 62$ (kg), abi jos svertų $70 + 62 = 132$ (kg), o svarstyklės rodytų 129 kg. Vadinasi, atsakymas D netinka.
Tikrinkime atsakymą E. Tada svarstyklės rodytų $72 - 67 = 5$ kilogramais mažiau, Roma svertų $59 + 5 = 64$ (kg), abi jos svertų $72 + 64 = 136$ (kg), o svarstyklės rodytų 131 kg. Vadinasi, atsakymas E tinka.
Renkamės atsakymą E.

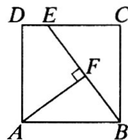
! Ligi pilno sprendimo liko patikrinti atsakymus A ir B ir įsitikinti, kad jie netinka.
Žinoma, geriau sudaryti lygtį. Jeigu Liucija sveria x kg, tai svarstyklės rodo $67 - x$ kilogramų daugiau (nesvarbu, jei tai ir neigiamas skaičius), tada Roma sveria $59 - (67 - x)$, abi jos sveria $x + 59 - 67 + x$, o svarstyklės rodo

$$x + 59 - 67 + x + (67 - x) = 131.$$

Todėl $x = 131 - 59 = 72$ (kg).
Taigi tinka tik atsakymas E.

!! Iš tikrųjų nereikia jokios lygties. Įsivaizduokime, kad Roma stovi ant svarstyklių, tada svarstyklės rodo 59 kg. Jeigu ant svarstyklių užlipa dar ir Liucija, tai svarstyklės rodo 131 kg. Vadinasi, Liucija sveria $131 - 59 = 72$ (kg).

J16. Ⓓ 3,75



? Kadangi AFB – garsusis Pitagoro trikampis, kurio statiniai 3 ir 4, tai kvadrato kraštinė 5. Iš akies nustatome, kad greičiausiai tinka atsakymas 3,75.
Renkamės atsakymą D.

! Remiantis Pitagoro teorema, nesunku sudaryti lygtį: jei $CE = x$, tai $BE = \sqrt{25 + x^2}$, $EF = EB - FB = \sqrt{25 + x^2} - 3$, $AE^2 = AF^2 + FE^2 = 4^2 + (\sqrt{25 + x^2} - 3)^2$, ir kadangi $DE = DC - EC = 5 - x$, tai iš $\triangle ADE$

$$AE^2 = AD^2 + DE^2, \quad 4^2 + \left(\sqrt{25 + x^2} - 3\right)^2 = 5^2 + (5 - x)^2,$$

$$25 + x^2 - 6\sqrt{25 + x^2} + 9 = 9 + 25 - 10x + x^2, \quad 3\sqrt{25 + x^2} = 5x,$$

$$9 \cdot 25 + 9x^2 = 25x^2, \quad 16x^2 = 9 \cdot 25, \quad 4x = 3 \cdot 5, \quad x = 15 : 4 = 7{,}5 : 2 = 3{,}75.$$

Teisingas atsakymas D.

!! Geriau paieškoti panašiųjų trikampių. Kadangi $\angle EBC = 90^\circ - \angle FBA = \angle FAB$, tai statieji trikampiai AFB ir BCE panašūs. Todėl $AF : FB = BC : EC$, $4 : 3 = 5 : EC$, $EC = 3{,}75$.

J17. Ⓒ 4

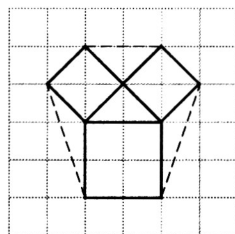
? Čia spėti neverta.

! Kadangi $x > y$, o $xy = 300$, tai $y^2 < 300$, $y < 18$. Nesunku perrinkti visus tokius skaičiaus 300 daliklius: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15$. Atitinkamai x bus $300, 150, 100, 75, 60, 50, 30, 25, 20$. Vadinasi, yra 9 poros skaičių x ir y, $x > y$, kurių sandauga lygi 300: (1, 300), (2, 150), (3, 100), (4, 75), (5, 60), (6, 50), (10, 30), (12, 25), (15, 20). Iš jų reikia išmesti poras, kuriose x ir y turi bendrų daliklių – tai poros (2, 150), (5, 60), (6, 50), (10, 30), (15, 20). Lieka 4 poros. Teisingas atsakymas C.

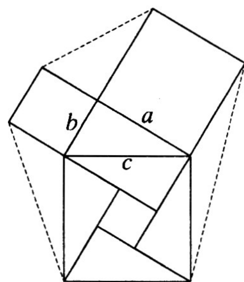
!! Šiaip jau tokie uždaviniai sprendžiami skaidant pirminiais daugikliais: $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Kadangi abu dvejetukai ir abu penketukai gali įeiti tik į vieną iš dauginamųjų, tai daugiklius 3, 4 ir 25 reikia paskirstyti dviem dauginamiesiems. Kadangi iš tų daugiklių į vieną dauginamąjį įeina bent du, tai gauname sandaugas $300 \cdot 1$, $12 \cdot 25$, $75 \cdot 4$, $100 \cdot 3$. Kadangi pirmas dauginamasis turi būti didesnis, tai gauname 4 poras: (300, 1), (25, 12), (75, 4), (100, 3).

J18. Ⓓ $2(ab + a^2 + b^2)$

? Pabandykime paspėlioti: jeigu $b \to 0$, tai $c \to a$, o šešiakampio plotas artėja į $2a^2$. Vadinasi, atkrinta atsakymai A ir B, bet spėti sunku.
Languotame popieriuje nusibraižykime brėžinį, kai $a = b$, $c = 2$. Tada pagrindinio trikampio plotas lygus 1 (dvi kvadratėlio pusės), viršutinio trikampio plotas toks pat.



Kiekvieno iš mažųjų kvadratų plotas lygus 2 (4 pusės kvadratėlio). Šoninio trikampio plotas lygus 1 (pusė stačiakampio 3×1 ploto minus pusė kvadratėlio). Iš viso gauname plotą $4 \cdot 1 + 2^2 + 2 \cdot 2 = 12$. Atsakymai atitinkamai duoda $6a^2$, $5a^2$, $\frac{11}{2}a^2$, $6a^2$, $\frac{13}{2}a^2$, o kadangi $a^2 + a^2 = c^2$, tai atitinkamai $3c^2$, $\frac{5}{2}c^2$, $\frac{11}{4}c^2$, $3c^2$, $\frac{13}{4}c^2$. Mūsų atveju $c = 2$, taigi gauname atsakymus 12, 10, 11, 12, 13. Kadangi atsakymas A jau atmestas, tai renkamės atsakymą D.



! Pratęskime kvadratų a ir b kraštines į kvadrato c vidurį ir papildykime brėžinį. Kadangi centrinio kvadratėlio kraštinė lygi $a-b$, tai apskaičiavę kvadrato plotą c^2 kaip keturių trikampių ir kvadratėlių plotų sumą, gautume Pitagoro teoremos įrodymą:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2.$$

Bet mums rūpi apskaičiuoti pradinių trikampių plotus.

Viršutinis trikampis lygus pagrindiniam trikampiui, todėl jo plotas lygus $ab/2$. Kairiojo trikampio pagrindas b, aukštinė a, taigi jo plotas taip pat $ab/2$. Pagaliau dešiniojo trikampio pagrindas a, o aukštinė b, taigi ir jo plotas lygus $ab/2$. Vadinasi, ieškomasis šešiakampio plotas lygus

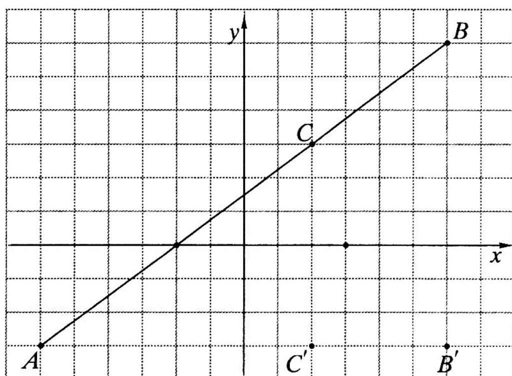
$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot ab/2 = 2(ab + a^2 + b^2).$$

Teisingas atsakymas D.

!! Žinoma, trumpiausias sprendimas gaunamas taikant trikampio ploto formulę. Kadangi kairiojo apatinio trikampio kampas tarp kraštinių b ir c lygus $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ (α – pradinio trikampio kampas tarp kraštinių b ir c), tai jo plotas lygus $\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, o tai yra pradinio trikampio plotas. Analogiškai ir dešinio (taip pat ir viršutinio) trikampio plotas toks pat.

J19. Ⓒ $\frac{2}{3}$

? Aišku, kad geriausia tašką imti atkarpoje AB. Iš brėžinio languotame popieriuje matyti, kad taško C abscisė šiek tiek mažesnė už 1. Vadinasi, tiks vienas iš atsakymų B ir C.
Norint atspėti atsakymą, užtenka pasidaryti didesnį brėžinį. Matome, kad taško C abscisė maždaug lygi 2 langeliams, t. y. $\frac{2}{3}$.
Renkamės atsakymą C.



?? Jeigu taškas C yra atkarpoje AB, tai $AB = AC + CB$. Pagal Pitagoro teoremą (arba pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę) gauname

$$\sqrt{(x+2)^2+2^2}+\sqrt{(2-x)^2+1^2}=\sqrt{4^2+3^2}.$$

Dabar galime tikrinti atsakymus B ir C.
B) $\sqrt{(\frac{3}{4}+2)^2+4}+\sqrt{(2-\frac{3}{4})^2+1}=5$, $\sqrt{\frac{121}{4}+4}+\sqrt{\frac{25}{16}+1}=5$, $\sqrt{137}+\sqrt{41}=20$. Bet $\sqrt{137}<12$, $\sqrt{41}<7$, taigi lygybė neteisinga.
C) $\sqrt{(\frac{2}{3}+2)^2+4}+\sqrt{(2-\frac{2}{3})^2+1}=5$, $\sqrt{\frac{64}{9}+4}+\sqrt{\frac{19}{9}+1}=5$, $\sqrt{100}+\sqrt{25}=15$. Lygybė teisinga, vadinasi, atsakymas C tinka.

! Galima spręsti lygtį:

$$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2-4x+5}=5,$$
$$x^2+4x+8=25+x^2-4x+5-10\sqrt{x^2-4x+5},$$
$$22-8x=10\sqrt{x^2-4x+5},\quad 11-4x=5\sqrt{x^2-4x+5},$$
$$121-88x+16x^2=25x^2-100x+125,$$
$$9x^2-12x+4=0,\quad (3x-2)^2=0,\quad x=2/3.$$

!! Kaip ir J16 uždavinyje, trumpesnis sprendimas remiasi trikampių panašumu. Iš $\triangle ABB'$ ir $\triangle ACC'$ gauname:

$$\frac{BB'}{CC'}=\frac{AB'}{AC'},\quad \frac{3}{2}=\frac{4}{2+x},\quad 6+3x=8,\quad x=\frac{2}{3}.$$

J20. Ⓑ 4

? Tikrinkime atsakymus.
A) Jei $p = 2$, tai turime skaičių $\overline{62q2q2q}$ ir naująjį skaičių $\overline{2q2q2}$. Kadangi skaitmenų suma $6+2q$ dalijasi iš 3, tai $2q$ (taigi ir q) dalijasi iš 3, todėl $3q$ dalijasi iš 9, o $12+3q$ nesidalija iš 9.
B) Jei $p = 4$, tai turime skaičius $\overline{64q4q4q}$ ir $\overline{4q4q4}$. Vėl q dalijasi iš 3, $3q + 18$ dalijasi iš 9, o kadangi q lyginis, tai užtenka imti $q = 0$.
Renkamės atsakymą B.

! Kadangi pradinis skaičius dalijasi iš 18, tai jis dalijasi iš 9 ir iš 2. Vadinasi, q lyginis, o skaitmenų suma $6 + 3p + 3q$ dalijasi iš 9, t. y. $2 + p + q$ dalijasi iš 3.
Kadangi naujasis skaičius $\overline{pqpqp}$ dalijasi iš 6, tai p lyginis, o skaitmenų suma $3p + 2q$ dalijasi iš 3. Tai reiškia, kad $2q$ dalijasi iš 3, t. y. q dalijasi iš 3.
Bet $2 + p + q$ dalijasi iš 3, todėl $2 + p$ dalijasi iš 3. Vadinasi, iš skaitmenų 0, 2, 4, 6, 8 (beje, tai ir yra visi lyginiai skaitmenys) tinka tik 4.
Jau įrodėme, kad q lyginis ir dalijasi iš 3, todėl q yra 0 arba 6. Gauname skaičius 6404040 ir 6464646, tenkinančius uždavinio sąlygą (pasitikrinti visada verta, net jeigu mūsų teiginiai buvo ekvivalentūs). Taigi vienintelis teisingas atsakymas yra 4.

!! Pasvarstykime, ką galėtų reikšti keistas sąlygos žodis „tikrai“.
Jis gal galėtų reikšti, kad antrasis skaičius dalijasi iš 6, bet gal jis dalijasi net iš 18 (ar kito 6 kartotinio).
Matėme, kad skaičius 6404040 dalijasi iš 18, bet skaičius 40404 – ne. Skaičius 6464676 taip pat dalijasi iš 18, bet skaičius 46464 – ne.

J21. Ⓒ 32

? Spėlioti čia vėl sunku.

! Pradėkime spalvinti skaičius. Pirmą skaičių galima spalvinti bet kuria spalva – sąlyga tam netrukdo. Antrą – taip pat, trečią, ketvirtą, penktą – taip pat. O štai kai nuspalviname penkis pirmuosius skaičius – rinktis jau nebegalima: šeštą skaičių reikia spalvinti ta spalva, kuria nuspalvintas pirmas, septintą – ta, kuria nuspalvintas antras ir t. t. Vadinasi, viską apsprendžia pirmi penki skaičiai.
Kadangi pirmą skaičių galima nuspalvinti dviem būdais, antrą – dviem būdais, ..., penktą – dviem būdais, tai pagal daugybos taisyklę visus penkis skaičius galima nuspalvinti $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ būdais.
Vadinasi, teisingas atsakymas yra C.

J22. Ⓒ Taškai niekada nebesusitiks

? Vėl visai neverta spėlioti.

! Įrodysime, kad taškai niekada nebesusitiks. Sakykime, kad kraštinei įveikti pirmam taškui reikia laiko t. Tada po sutikimo jis atsidurs taške C praėjus laikui $2t$, vėl taške A po $4t$, vėl taške C po $6t$ ir t.t. Antras taškas viršūnėje C atsidurs po $t\sqrt{2}$, vėl bus taške A po $2t\sqrt{2}$ ir t.t. Vienintelė galimybė taškams susitikti yra taškai A ir C. Tarkime, kad taškai susitiko praėjus laikui T. Tada

$$T = 2nt = mt\sqrt{2}, \quad n \in \boldsymbol{N}, \ m \in \boldsymbol{N}.$$

Kadangi $t > 0$, tai $2n/m = \sqrt{2}$. Bet kairėje – racionalusis skaičius, o dešinėje – iracionalusis. Prieštara, taigi taškai niekada nebesusitiks.
Teisingas atsakymas C.

J23. Ⓑ 1

? Tikrinkime atsakymą A. Sakykime, kad Beta pagavo 0 pelių. Tada Tina ir Liza pagavo tiek pat pelių, kiek Dona (kiekvienos katės pagautų pelių skaičių pažymėkime jos vardo pirmąja raide),

$D = 3 + L$. Dona ir Liza pagavo mažiau negu 3 peles, $D + L < 3$. Taigi Dona pagavo $\geqslant 3$ peles ir pagavo < 3 peles. Prieštara.
Tikrinkime atsakymą B. Sakykime, kad Beta pagavo 1 pelę. Tada Tina ir Liza pagavo tiek pat pelių, kiek Beta ir Dona, $3 + L = 1 + D$, t. y. Dona pagavo 2 pelėmis daugiau negu Liza, $D = L + 2$. Dona ir Liza kartu pagavo mažiau negu 4 peles, $D + L < 4$. Vadinasi, Liza pagavo 0 pelių (kitaip Liza pagavo $\geqslant 1$ pelę, Dona pagavo $\geqslant 3$ peles, – prieštara). Taigi Dona pagavo 2 peles. Visos uždavinio sąlygos išpildytos. Renkamės atsakymą B.

! Iki pilno sprendimo liko įsitikinti, kad kiti atsakymai netinka. Tai padaryti nėra sunku, bet nuobodu. Geriau pasitelkime į pagalbą algebrą. Tada $T + L = B + D$, $D > B$, $D + L < T + B$, $T = 3$. Pakeitę T trejetu, gauname sistemą

$$3 + L = B + D, \quad D > B, \quad D + L < 3 + B.$$

Išreiškę iš pirmo sąryšio $B = 3 + L - D$, gauname nelygybių sistemą

$$D > 3 + L - D, \quad D + L < 3 + 3 + L - D, \quad \text{t. y.} \quad D < 3, \quad 2D > 3 + L.$$

Kadangi iš antros nelygybės $2D > 3$, t. y. $D \geqslant 2$, tai iš pirmos nelygybės $D = 2$. Tada iš antros nelygybės $L < 1$, t. y. $L = 0$. Todėl iš lygybės $3 + L = B + D$ gauname $3 + 0 = B + 2$, $B = 1$. Kaip visuose žodiniuose uždaviniuose, gautą atsakymą $T = 3$, $D = 2$, $L = 0$, $B = 1$ reikia tikrinti – ar jis tenkina sąlygą. Nesunku įsitikinti, kad visi sąlygos reikalavimai įvykdyti.
Vadinasi, teisingas tik atsakymas B.

!! Pastebėkime, kad nelygybė $x > y$ su sveikaisiais skaičiais x ir y yra ekvivalenti nelygybei $x \geqslant y + 1$. Iš tikrųjų, kadangi $x - y > 0$ ir $x - y$ sveikas skaičius, tai $x - y \geqslant 1$, $x \geqslant y + 1$. Remdamiesi šia savybe, sąlygą galime užrašyti taip:

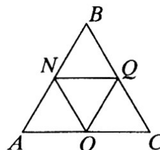
$$3 + L = B + D, \quad D \geqslant B + 1, \quad 2 + B \geqslant D + L, \quad T = 3.$$

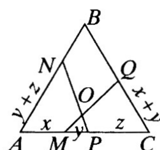
Sudėję pirmą ir trečią sąryšius, gauname $5 \geqslant 2D$, t. y. $D \leqslant 2$. Dabar iš antro sąryšio $B \leqslant 1$. Bet tada iš pirmo sąryšio $B = 1$, $D = 2$, $L = 0$, ir radome jau turėtą sprendinį.

J24. Ⓑ 60°

? Pateiktas brėžinys neatitinka sąlygos, todėl remiantis juo spėti pavojinga. Galima pasidaryti tikslesnį brėžinį ir tada spėti (žr. žemiau dešinį paveikslėlį).
Renkamės atsakymą 60°, t. y. B.

?? Laikykime, kad taškai M, P ir O susiliejo kraštinės vidury je (žr. kairį paveikslėlį). Tada kampas neabejotinai 60° – tuo įsitikiname sujungę N ir Q.





! Pažymėkime pagrindo atkarpas $AM = x$, $MP = y$ ir $PC = z$. Tada pagal sąlygą $AN = y + z$, $CQ = x + y$. Bet trikampiai NAP ir MCQ lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Todėl $\angle OMP + \angle OPM = \angle QMC + \angle NPA = \angle QMC + \angle MQC = 180^\circ - \angle QCM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, taigi $\angle MOP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Vadinasi, $\angle NOQ = \angle MOP = 60^\circ$.
Teisingas atsakymas B.

J25. Ⓓ 89

? Visiškai aišku, kad spėlioti neverta.

! Išverskime sąlygą į matematikos kalbą. Sakykime, kad tarpas tarp medelių lygus 1. Tada kengūros šuolis gali būti lygus 1 arba 2. Jai reikia įveikti atstumą 10. Vadinasi, uždavinio klausimas virsta tokiu:
Keliais skirtingais būdais galima sudaryti sumą 10 iš dėmenų 1 ir 2? (*Būdai laikomi skirtingais, jeigu jie skiriasi dėmenų skaičiumi; jei dėmenų skaičius sutampa, tai turi skirtis vienetų ir dvejetų išsidėstymas.*)
Mažiausias dėmenų skaičius gali būti 5. Tada visi dėmenys yra 2, ir todėl sudaryti sumą 10 galima tik vienu būdu.
Jei sumoje yra 4 dvejetai, tai yra 2 vienetai. Yra 6 dėmenys, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų pasirinkti 2 vietas iš 6, kuriose bus vienetai. Tai padaryti nesunku išrašius visas vietų kombinacijas:

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Jų yra 15.
Jei sumoje yra 3 dvejetai, tai vienetų yra 4. Dėmenų yra 7, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų pasirinkti 3 vietas iš 7, kuriose bus dvejetai. Išrašyti visus būdus taip pat nesunku (nors ir nuobodoka):

123 124 125 126 127	234 235 236 237	345 366 347	456 457
134 135 136 137	245 246 247	356 357	467
145 146 147	256 257	367	567
156 157	267		

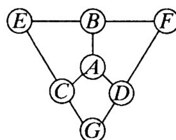
Matome, kad yra 35 būdai.
Jeigu sumoje yra 2 dvejetai, tai vienetų yra 6. Dėmenų yra 8, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų pasirinkti 2 vietas iš 8 dvejetams. Išrašome visus būdus:

12 13 14 15 16 17 18
23 24 25 26 27 28
34 35 36 37 38
45 46 47 48
56 57 58
67 68
78

Matome, kad yra $7+6+5+4+3+2+1=28$ būdai.
Jeigu sumoje yra 1 dvejetas, tai vienetų yra 8, ir reikia suskaičiuoti, kiek yra būdų dvejetui pasirinkti vieną vietą iš 9. Aišku, kad yra 9 būdai.
Pagaliau jeigu sumoje yra tik vienetai, tai yra vienintelis būdas.
Vadinasi, iš viso yra $1+15+35+28+9+1=89$ būdai sudaryti sumą 10.
Teisingas atsakymas D.

!! Remiantis derinių skaičiaus formule suskaičiuoti būdų skaičių paprasčiau:
$C_5^5+C_6^4+C_7^3+C_8^2+C_9^1+C_{10}^0=1+15+35+28+9+1=89.$

J26. Ⓐ 1



? Tikrinkime atsakymus. Kadangi jie išrikiuoti, pradėkime nuo vidurinio.
Atmetę iš keturkampio skritulį A, gausime tris trejetus su vienodomis sumomis, į kiekvienus du iš kurių įeina lygiai vienas bendras elementas.
Jei $A=4$, tai reikia iš likusių skaičių sudaryti trejetus, kurių trijų dėmenų sumos būtų lygios $15-4=11$. Tokie trejetai yra tik du – 731 ir 632. Vadinasi, atsakymas C netinka.

Jei $A = 5$, tai sumos turi būti lygios $15 - 5 = 10$. Tokių trejetų yra vėl tik du – 721 ir 631.

Jei $A = 6$, tai sumos turi būti lygios 9. Toks trejetas yra tik vienas – 531.

Jei $A = 2$, tai sumos turi būti lygios 13. Tokie trejetai yra tik du – 751 ir 643.

Renkamės atsakymą A.

! Iki pilno sprendimo (jeigu nebūtų nurodyti 5 atsakymai) lieka patikrinti reikšmes $A = 1$, $A = 3$, $A = 7$.

Kai $A = 7$, tai sumos turi būti 8. Yra tik vienas toks trejetas: 521. Kai $A = 3$, tai sumos lygios 12. Tokių sumų yra trys – 741, 651 ir 642. Nesunku nurodyti atitinkamą konstrukciją (sutampantys elementai rašomi kraštinės viduryje, o viršūnė tada nustatoma vienareikšmiškai; žr. konstrukciją kairėje).
Kai $A = 1$, tai sumos lygios 14. Tinka trejetai 752, 743, 653 (žr. konstrukciją dešinėje).

5 1 7   2 7 4
6 3 4   5 1 3
2   6

!! Kadangi visų skaičių suma lygi 28, o keturkampių skaičių suma lygi 15, tai kiekvienoje kraštinėje skaičių suma lygi 13. Bet sudaryti sumą 13 iš 3 skirtingų dėmenų, ne didesnių už 7, galima tik taip: $7+5+1 = 7+4+2 = 6+5+2 = 6+4+3$. Kadangi bet kurios kraštinės turi bendrą viršūnę, tai kartu negali įeiti pirma ir ketvirta sumos. Vadinasi, yra dvi galimybės: $1+5+7 = 2+4+7 = 2+5+6$ ir $2+4+7 = 2+5+6 = 3+4+6$. Skaičiai, kurie kartojasi 2 kartus, turi būti viršūnėse, o kurie tik 1 kartą – kraštinės viduryje. Pirmu atveju gauname, pavyzdžiui, $5+1+7 = 7+4+2 = 2+6+5$, ir konstrukcija įmanoma, o po skrituliu A bus skaičius 3.
Antru atveju

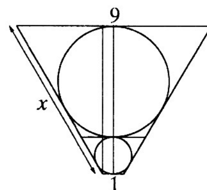
$$2+7+4 = 4+3+6 = 6+5+2,$$

o po skrituliu A yra skaičius 1.
Vadinasi, jeigu nebūtų nurodyti 5 atsakymai, tai atsakymas į uždavinio klausimą būtų toks: 3 arba 1. Kadangi reikia rinktis iš 5 duotų atsakymų, o atsakymo 3 tarp jų nėra, tai renkamės atsakymą A.
Taigi žymiai geriau būtų formuluoti uždavinio klausimą taip:
Koks skaičius iš žemiau nurodytų gali būti po skrituliu A?
Beje, iš sprendimo aišku, kad nurodytos konstrukcijos yra vienintelės (jei nelaikysime skirtingomis konstrukcijų, sutapdinamų posūkiais ar simetrijomis).

!!! Labai gražus ir toks sprendimas. Pagalvokime, kur gali stovėti didžiausias skaičius – 7. Centre stovėti jis negali, nes tada ketrukampio, kuriame yra skaičius 6, skaičių suma bus ne mažesnė kaip $7+6+2+1 = 16$, – prieštara.
Sakykime, jis stovi viršūnėje, pavyzdžiui, F. Tada skaičius 6 negali stovėti nei centre (tada ketrukampio skaičių suma būtų ne mažesnė kaip 16), nei kraštinėse FE ir FG (tada kraštinės skaičių suma būtų ne mažesnė kaip $7+6+1 = 14$). Vadinasi, tai skaičius C. Kadangi $D + G = 13 - F = 13 - 7 = 6$, tai iš keturkampio $ADGC$ turime $A = 3$. Iš keturkampio $FBAD$ turime $B + D = 5$. Kadangi skaičius 3 jau užimtas, tėra viena pora, kuri duoda sumą 5, – tai $4+1$. Dėl simetrijos galima laikyti, kad $B = 1$, $D = 4$. Tada jau vienareikšmiškai $G = 2$, $E = 5$.
Jeigu skaičius 7 stovi kraštinės viduryje, tai galima laikyti, kad tai B. Vėl lygiai taip pat skaičius 6 gali būti tik G. Tada $D + F = 7$, ir iš keturkampio $BFAD$ randame, kad $A = 1$. Kadangi $C + D = 8$, ir skaičiai 1 ir 6 užimti, tai lieka tik pora 3 ir 5. Galime laikyti, kad $C = 5$, tada $D = 3$, $F = 4$, $E = 2$.

J27. Ⓑ 8

? Spėti sunku – per daug artimi atsakymai.



! Išveskime didžiosios trapecijos aukštinę per apskritimų centrus, tada aukštinės atkarpos sutinka kaip 3:1. Atkarpą x sudaro atkarpos 4,5 (didžiojo apskritimo liestinė), 0,5 (mažojo apskritimo liestinė) ir dvi lygios atkarpos (kiekviena jų lygi bendrai apskritimų liestinei). Todėl tos atkarpos lygios $(x - 4{,}5 - 0{,}5)/2 = 0{,}5x - 2{,}5$.

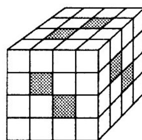
Pagal Talio teoremą

$$3 : 1 = (4{,}5 + 0{,}5x - 2{,}5) : (0{,}5 + 0{,}5x - 2{,}5), \quad 2 + 0{,}5x = 1{,}5x - 6, \quad x = 8.$$

Teisingas atsakymas B.

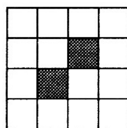
!! Žinoma, uždavinį galima spręsti ir remiantis panašiaisiais trikampiais (žr. brėžinį). Kadangi didžiojo ir mažojo stačiųjų trikampių statinių santykis yra 4:1, o didžiojo trikampio pagrindas lygus $4{,}5 - 0{,}5 = 4$, tai mažojo trikampio pagrindas lygus 1. Tada bendroji išorinė apskritimų liestinė lygi $2(1 + 0{,}5) = 3$, o $x = 3 + 4{,}5 + 0{,}5 = 8$.

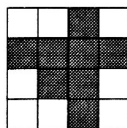
J28. Ⓒ 44

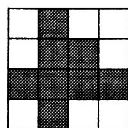


? Viena skylė išduria 4 kubelius, taigi 6 skylės išdurtų 24 kubelius, jei nesikirstų. Tada liktų $64 - 24 = 40$ kubelių. Bet kai kurie kubeliai sutampa, ir spėti sunku.

! Turint gerą erdvinę vaizduotę, galima skaičiuoti įvairiai. Šiaip jau neblogai skaičiuoti sluoksniais vaizduojant juos:


I, IV


II


III

I (apatiniame) ir IV sluoksnyje bus išdurta po 2 kubelius, II ir III sluoksniuose – po 8 kubelius. Taigi liks $64 - 20 = 44$ kubeliai.
Teisingas atsakymas C.

!! Galima įsivesti koordinačių sistemą ir sužymėti kubelius pagal viršutinį dešinįjį užpakalinį kampą (pavyzdžiui, kairysis apatinis priekinis kubelis bus (1, 1, 1), arba trumpiau 111. Tada gręždami per priekinius užtušuotus kvadratėlius išdursime kubelius

213, 223, 233, 243 ir 312, 322, 332, 342,

gręžiant per šoninius – kubelius

423, 323, 223, 123 ir 432, 332, 232, 132,

per viršutinius –

224, 223, 222, 221 ir 334, 333, 332, 331.

Du kubeliai čia įrašyti po 3 kartus, taigi sąraše yra $24 - 6 + 2 = 20$ kubelių.

J29. Ⓔ 35

? Spėti čia visai neįmanoma.

! Aišku, kad visai nesvarbu, ar jie mėto pakaitomis, ar ne – abiejų galimybės kiekviename metime vienodos. Jeigu žaidimas būtų tęsiamas, tai kad laimėtų Petriukas, jam turi pasisekti tris kartus iš eilės, t. y. žaidimo rezultatai turi būti PPP. Visais kitais atvejais laimės Marytė. Kadangi Petriuko galimybės laimėti vieną partiją yra 1 iš 2, tai laimėti dvi partijas – 1 iš 4, o laimėti 3 partijas – 1 iš 8 (sakome, kad tikimybė yra 1/8). Vadinasi, Marytė turi galimybių laimėti 7 iš 8 (tikimybė yra 7/8). Kadangi galimybės (ir tikimybės) sutinka kaip 1:7, tai ir saldainius reikia dalyti tokiu santykiu. Todėl Petriukui teks $40 : 8 = 5$ saldainiai, o Marytei – 35 saldainiai.
Teisingas atsakymas E.

!! Skaičiuokime šiek tiek kitaip. Mes negalime pasakyti, kiek dar būtų prireikę partijų, jeigu žaidimas būtų tęsiamas (pavyzdžiui, jei pirmą partiją laimėtų Marytė, tai žaidimas baigtųsi, o jei Petriukas, tai dar tęstųsi). Bet kuriuo atveju žaidimas bus pasibaigęs po 3 partijų – iš viso jie kartu turės ne mažiau kaip $7 + 9 + 3 = 19$ taškų, ir bent vienas turės ne mažiau kaip 10 taškų.
Įsivaizduokime, kad jie žais visas 3 partijas, nors laimėtojas būtų ir paaiškėjęs anksčiau. Tada remiantis kombinatorikos daugybos taisykle iš viso yra $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ būdai vykti toms 3 partijoms; beje, galima ir taip visus būdus išrašyti abėcėliškai:

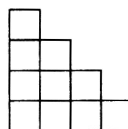
$$MMM,\ MMP,\ MPM,\ MPP,\ PMM,\ PMP,\ PPM,\ PPP.$$

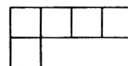
Aišku, kad visi tie būdai vienodai galimi. Bet iš jų tik vienas – PPP lemia pergalę Petriukui, o visi kiti 7 – Marytei. Taigi Marytės galimybės 7 kartus didesnės, taigi ir saldainių ji turi gauti 7 kartus daugiau.

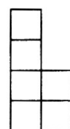
J30. Ⓒ 12

? Spėti čia sunku.

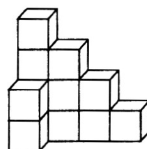
! Vaizdas iš kairės (ir iš viršaus) rodo, kad yra tik du vienetinio storio sluoksniai žiūrint iš priekio – priekinis ir užpakalinis. Kadangi pirmame sluoksnyje, kaip rodo vaizdas iš viršaus, kubelių yra tik kairiajame stulpelyje, tai abu kubeliai yra jame.


Iš priekio


Iš viršaus

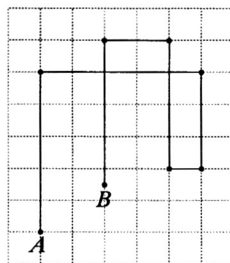

Iš kairės

Vaizdas iš priekio rodo, kad užpakalinės eilės kairiajame stulpelyje stovi keturi kubeliai, antrame – 3, trečiame – 2 ir ketvirtame – 1.
Vadinasi, iš viso yra 12 kubelių, ir teisingas atsakymas C.
Kaip sustatyti kubeliai, pavaizduota paveikslėlyje.



SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. Ⓓ 5 km



? Spėti visiškai neverta.

! Nusibraižius brėžinį languotame popieriuje (1 langelis = 2 km), aišku, kad pagal Pitagoro teoremą $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (km).
Beje, brėžinio galima netgi nedaryti, o atskirai skaičiuoti kryptis horizontaliai („vakarų-rytų") ir vertikaliai („pietų-šiaurės"). Tada horizontaliai buvo nuvažiuota $10-2-4 = 4$ (km), o vertikaliai $10-6+8-9 = 3$ (km).
Teisingas atsakymas D.

!! Galima kalbėti ir apie taškų koordinates. Jeigu taškas $A(0, 0)$, tai kitų taškų koordinatės yra $(0, 10)$, $(10, 10)$, $(10, 4)$, $(8, 4)$, $(8, 12)$, $(4, 12)$, $B(4, 3)$. Todėl $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$ (km).

S2. Ⓔ Tokios dienos nėra

? Tikriname atsakymus.
A) Tai negalėjo būti pirmadienį, nes antradienį Baltasis triušis tikrai meluos, ir 2) teiginys būtų teisingas – o pirmadieniais jis meluoja.
B) Tai negalėjo būti antradienį, nes 2) teiginys vėl būtų neteisingas.
C) Tai negalėjo būti ketvirtadienį, nes 2) teiginys būtų teisingas, o penktadieniais jis nemeluoja.
D) Tai negalėjo būti sekmadienį, nes 1) teiginys būtų teisingas, o šeštadieniais jis nemeluoja.
Renkamės atsakymą E.

! Norint įsitikinti, kad tikrai tokios dienos nėra, dar reikia patikrinti trečiadienį, penktadienį ir šeštadienį.
Tai negalėjo būti trečiadienis, nes tada jis antradienį nemeluotų, o tai ne taip.
Tai negalėjo būti penktadienis, nes tada jis nemelavo ketvirtadienį, ir 1) teiginys neteisingas.
Tai negalėjo būti šeštadienį, nes vėl 1) teiginys būtų neteisingas.
Vadinasi, tokios dienos nėra, ir teisingas atsakymas E.

!! Sprendimą galima užrašyti trumpai.
Jei tai būtų įvykę pirmadienį, antradienį, ketvirtadienį, penktadienį, šeštadienį, tai 2) teiginys būtų neteisingas.
Jei tai būtų įvykę trečiadienį ar sekmadienį, tai 1) teiginys būtų neteisingas.
Vadinasi, nėra tokios dienos, ir teisingas atsakymas E.

Pastaba. Tai labai retas atvejis „Kengūros" konkurse, kai teisingas neigiamas atsakymas.

S3. Ⓐ 5

? Marytės tėvelių amžių suma yra 78 metai, o Marytės ir tėčio amžių suma yra 46 metai.
Kadangi atsakymai išrikiuoti, spėliokime nuo vidurio.
Jei Marytei 11 metų, tai tėčiui 35 metai, tada mamai $35 - 4 = 31$ metai, ir jų amžių suma 66 metai, – netinka.
Jei Marytei 13 metų, tai tėčiui 33, mamai 27, jų amžių suma 60, – netinka.
Kadangi amžių suma sumažėjo, tai eikime į kitą pusę. Jei Marytei 7 metai, tai tėčiui 39, mamai 35, ir jų amžių suma 74, – netinka.
Jei Marytei 5 metai, tai tėčiui 41, mamai 37, ir jų amžių suma 78, – tinka.
Renkamės atsakymą A.

! „Kengūriškam" sprendimui dar reikia patikrinti atsakymus A ir E.
Atsakymas A jau patikrintas. Jei Marytei 15 metų, tai tėčiui 31, mamai 17, jų amžių suma 58, – netinka. Vadinasi, vienintelis teisingas yra atsakymas A.

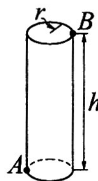
!! Spręskime uždavinį, jei atsakymas neduotas. Kadangi tėčio ir mamos amžių vidurkis 39 metai, o tėtis vyresnis už mamą 4 metais, tai tėčio amžius už vidurkį didesnis 2 metais, o mamos – mažesnis 2 metais, t. y. 41 ir 37. Tada Marytės amžius lygus $2 \cdot 23 - 41 = 5$ metai, ir tai yra vienintelis uždavinio atsakymas.
Galima spręsti ir sudarant lygtis. Jei Marytės amžius x, o tėčio – y, tai mamos amžius yra $y - 4$. Turime dvi lygtis: $(x + y) : 2 = 23$, $(y + y - 4) : 2 = 39$. Iš antros lygties $2y - 4 = 78$, $y = 41$, tada iš pirmos lygties $x + 41 = 46$, $x = 5$.

S4. Ⓔ 13

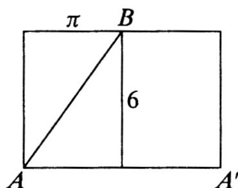
? Paspėliokime. Jeigu skaičiaus $3^{20} \cdot 5^{30} - 2$ dalybos iš 15 liekana būtų 0, tai $3^{20} \cdot 5^{30}$ dalijant iš 15 duotų liekaną 2. Bet skaičius $3^{20} \cdot 5^{30}$ dalijasi iš $15 = 3 \cdot 5$, taigi iš tikrųjų liekana 0. Iš atsakymų matome, kad tinka liekana 13.
Renkamės atsakymą E.

! Faktiškai uždavinį jau išsprendėme: kadangi $3^{20} \cdot 5^{30}$ dalijasi iš 15, tai ieškomoji liekana bus 13, ir teisingas atsakymas E (net jei atsakymai nenurodyti).

S5. Ⓓ $\sqrt{\pi^2 + 36}$



? Jeigu leistumės tiesiai žemyn į pagrindą, tai kelias būtų $h = 6$. Pasiekti tašką A dar reikia $2r = 2$, bendras atstumas būtų lygus 8. Atstumas tiese tarp A ir B pagal Pitagoro teoremą lygus $\sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$. Tarp šių skaičių yra 7 ir $\sqrt{\pi^2 + 36}$ ($2\sqrt{\pi^2 + 9} > 8$, nes $\pi^2 + 9 > 16$). Reikia rinktis iš šių dviejų atsakymų. Kadangi panašu, jog į atsakymą turėtų įeiti π, tai renkamės atsakymą D.



! Pavaizduokime ritinio šonio paviršiaus išklotinę. Matome, kad trumpiausias atstumas tarp A ir B yra $AB = \sqrt{\pi^2 + 36}$.
Teisingas atsakymas D.

!! Išklotinėje išveskime atkarpą AB ir vėl išklotinę susukime į ritinį (taškas A' sutaps su tašku A). Matuoti galima siūlu pagal gautą erdvinę kreivę AB. Beje, įtempus siūlą tarp taškų A ir B, pats siūlas įgis tos kreivės formą.

S6. Ⓓ 13 h

? Spėlioti čia sunku, bet šiaip jau aišku, kad kuo toliau, tuo laikas daugiau didėja. Kadangi antrą dieną palyginti su pirma laikas padidėjo 1 valanda, tai galima spėti, kad jis trečią dieną palyginti su antra jis padidės dar kokiomis 2 h. Vadinasi, panašiausi atsakymai 10 h ir 13 h. Ko gera, verta imti didesnį laiką.
Renkamės atsakymą D.

?? Pabandykime atspėti, kiek laiko kopė Sizifas į kalną pirmą dieną. Tikrinkime 4 h. Tada pirmą dieną jis būtų leidęsis 3 h. Antrą dieną jis būtų kopęs 8 h, bet tai netinka, nes 8 h turi būti bendras laikas.
Imkime 3 h. Tada jis pirmą dieną leidosi 4 h, antrą – kopė 6 h, leidosi 2 h, o tai atitinka sąlygą. Todėl trečią dieną jis kopė 12 h, leidosi 1 h ir sugaišo 13 h.
Renkamės atsakymą D.

! Pažymėkime pirmos dienos kopimo į kalną laiką t, tada leidimosi laikas $7 - t$ (valandų). Kadangi antrą dieną jis kopė $2t$ valandų, o leidosi $(7 - t)/2$ valandų, tai turime:

$$2t + (7 - t)/2 = 8, \quad 4t + 7 - t = 16, \quad 3t = 9, \quad t = 3.$$

Vadinasi, antrą dieną Sizifas kopė 6 h, o leidosi 2 h. Todėl trečią dieną jis kopė 12 h, leidosi 1 h ir iš viso sugaišo 13 h.
Teisingas atsakymas D.

!! Kaip taisyklė, jei uždavinį pavyksta išspręsti sudarius pirmojo laipsnio lygtį, tai jį galima išspręsti ir „be lygčių".
Pirmos dienos kopimo ir leidimosi laikų suma yra 7. Pagal sąlygą dvigubo kopimo laiko ir pusės leidimosi laiko suma yra 8, o tai reiškia, kad keturgubo kopimo laiko ir leidimosi laiko suma yra 16. Vadinasi, trigubas kopimo laikas yra $16 - 7 = 9$, o pats kopimo laikas yra 3.
Taigi pirmą dieną Sizifas kopė 3 h, antrą – 6 h, trečią – 12 h. Pirmą dieną Sizifas leidosi 4 h, antrą – 2 h, trečią – 1 h. Vadinasi, trečią dieną jis užtruko $12 + 1 = 13$ (h).
Žinoma, tai tos pačios lygtys, tik užrašytos žodžiais.

S7. Ⓓ 2^{18}

? Spėti čia tikrai neverta, nors ir aišku, kad atsakymas mažesnis už 2^{19} (t. y. E netinka).

! Ketvirtadalis atstumo yra $2^{20} : 4 = 2^{20} : 2^2 = 2^{18}$ (km). Vadinasi, be ryšio erdvėlaivis skrido $2^{19} - 2^{18} = 2 \cdot 2^{18} - 2^{18} = 2^{18}$ (km).
Teisingas atsakymas D.

S8. Ⓒ 37

? Paspėliokime. Esame girdėję, kad dviejų daugiklių suma mažiausia, kai jie lygūs. Ieškokime apylygių skaičiaus 300 daliklių. Kadangi $17^2 < 300 < 18^2$, tai vienas iš jų bus didesnis už 18, todėl imame 20. Bet 20 ir 15 turi bendrą daliklį 5. Imame 25. Tada 25 ir 12 bendrų daliklių nebeturi, o jų suma lygi 37.
Renkamės atsakymą C.

! Reikia nustatyti mažiausią galimą sumos $x + y$ reikšmę, kai $xy = 300$, x ir y natūralieji ir neturi bendrų daliklių. Kadangi $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 4 \cdot 25$, tai gali būti:

x	1	3	4	12	75	100	300
y	300	100	75	25	4	3	1
$x + y$	301	103	79	37	79	103	301

Vadinasi, mažiausia galima sumos $x + y$ reikšmė yra 37.
Teisingas atsakymas C.

S9. Ⓑ 495

? Kadangi $\overline{xyz} - \overline{zyx} = \overline{x0z} - \overline{z0x}$ ir $x > z$, tai skirtumo priešpaskutinis skaitmuo 9.
Renkamės atsakymą B.

! Reikia įsitikinti, kad yra toks skaičius $\overline{xyz}$, kad $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 495$, t. y. $\overline{x0z} - \overline{z0x} = 495$, $\overline{z0x} + 495 = \overline{x0z}$. Imkime, pavyzdžiui, $x = 7$. Tada $z = 2$. Dabar galime y imti tiesiog nulį. Iš tikrųjų, $702 - 207 = 495$.
Vadinasi, atsakymas B teisingas.

!! Išspręskime uždavinį, kai atsakymai nenurodyti. Turime $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99x - 99z = 99(x - z)$. Kadangi šis skaičius turi būti triženklis ir turi prasidėti 4, tai $x - z = 5$. Bet tada $99 \cdot 5 = 495$.
Vadinasi, teisingas tik atsakymas 495. Beje, skaitmenys x, y, z gali būti bet kokie, tik turi tenkinti sąlygą $x - z = 5$, t. y. gali būti $x = 9$, $z = 4$; $x = 8$, $z = 3$; $x = 7$, $z = 2$; $x = 6$, $z = 1$ (atvejis $x = 5$, $z = 0$ kelia šiek tiek abejonių, nes pats užrašas $\overline{zyx}$ paprastai reiškia, kad $z \neq 0$). Kitaip sakant, kaip $\overline{xyz}$ tinka skaičiai $\overline{9y4}$, $\overline{8y3}$, $\overline{7y2}$, $\overline{6y1}$ (o gal ir $\overline{5y0}$), kur y – bet kuris skaitmuo.

Pastaba. Šis uždavinys – geras pavyzdys, kai skaičiuoti (konkurse) neverta: tikimės, kad teisingas atsakymas nebus C, o tada atspėjame B.

S10. Ⓒ 5

? Kadangi suma lygi $45a$, tai suma gali baigtis tik 0 arba 5. Bet visi skaitmenys negali būti lygūs 0, todėl tai 5.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi $a + 2a + \cdots + 9a = 45a$, tai gauname lygybę

$$45 \cdot a = \overline{bb\ldots b}.$$

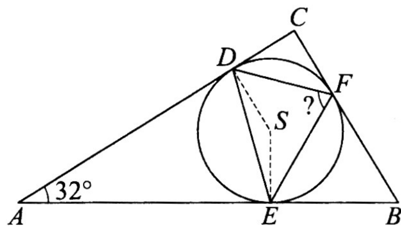
Kairė pusė dalijasi iš 5, todėl ir dešinė dalijasi iš 5. Kadangi $b = 0$ netinka (tada $a = 0$ ir nėra natūralus), tai skaitmuo $b = 5$. Bet tai dar nereiškia, kad atsakymas C teisingas – o gal tokio a iš viso nėra, ir tada teisingas atsakymas E). Nurodysime tinkamą a. Kadangi $45a = 55\ldots5$, tai $9a = 11\ldots1$, ir užtenka imti 9 vienetukus. Taigi su

$$a = \underbrace{11\ldots1}_{9} : 9 = 12345679$$

suma tikrai bus iš vienų penketukų.
Teisingas atsakymas C.

!! Raskime visus tokius skaičius a.
Jei $45a = 55\ldots5$, tai $9a = 11\ldots1$. Vadinasi, skaičius $11\ldots1$ turi dalytis iš 9, o tai reiškia, kad jo vienetukų skaičius turi dalytis iš 9. Vadinasi, tinka $a = 111\,111\,111 : 9 = 12345679$ ir visi skaičiai $12345679\,12345679\ldots\,12345679$.
Skaičių $\underbrace{11\ldots1}_{9k}$ galima užrašyti kaip $\underbrace{99\ldots9}_{9k} : 9 = (1\underbrace{00\ldots0}_{9k}-1) : 9 = (10^{9k} - 1) : 9$, o skaičių a – kaip $(10^{9k} - 1) : 81$.
Vadinasi, kai $a = (10^{9k} - 1)/81\,(k \in N)$, tai mūsų suma bus lygi $45a = 5(10^{9k} - 1)/9 = 5 \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{9k} : 9) = 5 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{9k} = \underbrace{55\ldots5}_{9k}$ ir tikrai užrašoma vienais penketukais.

S11. Ⓓ 74°



? Iš akies panašu, kad brėžinys gana tikslus (32° kampas ir statieji kampai panašūs į reikiamus). Ieškomasis kampas vizualiai yra tarp 70° ir 80°.
Renkamės atsakymą D.

?? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo trikampio formos, tai laikykime, kad trikampis ABC lygiašonis, $AC = AB$. Tada $\angle C = \angle B = (180° - 32°) : 2 = 74°$. Bet $CD = CF$, todėl $\triangle DCF$ lygiašonis, ir $\angle CFD = \frac{1}{2}(180° - 74°) = 53°$. Analogiškai $\angle BFE = 53°$, ir $\angle DFE = 180° - 2 \cdot 53° = 74°$.
Renkamės atsakymą D.

! Kadangi S apskritimo centras, tai $\angle SDA = \angle SEA = 90°$ (spindulys statmenas liestinei). Todėl iš keturkampio $ADSE$ $\angle DSE = 180° - 32° = 148°$. Todėl kairysis lankas $\smile DE = 148°$, o į jį besiremiantis $\angle DFE = 148° : 2 = 74°$.
Teisingas atsakymas D.

S12. Ⓓ 3000

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, tai pradėkime nuo vidurinio.
Sakykime, kad Marius turi 2400 litų, tada penktadaliu didesnės santaupos būtų 2880 litų. Tada jam trūktų 2320 litų, o dabar trūksta 3000 litų. Ketvirtadalį atmetus iš 3000 litų, gauname 2250 litų. Panašu, kad reikia bandyti didesnį atsakymą. Sakykime, kad jis turi 3000 litų, tada penktadaliu didesnės santaupos būtų 3600 litų. Tada jam trūktų 1800 litų, o dabar trūksta 2400 litų. Atmetus ketvirtadalį iš 2400 litų, kaip tik gausime 1800 litų.
Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad Marius turi sutaupęs x litų, tada penktadaliu didesnės santaupos būtų $x+x/5 = 6x/5$ litų. Tada jam trūktų $5400 - 6x/5$, o dabar jam trūksta $5400 - x$. Pagal sąlygą pirmas skaičius sudaro 3/4 pastarojo:

$$5400 - 6x/5 = 3(5400 - x)/4, \quad 5400 \cdot 20 - 24x = 15 \cdot 5400 - 15x,$$

$$9x = 5 \cdot 5400, \quad x = 5 \cdot 600 = 3000.$$

Kaip visada žodiniuose uždaviniuose, atsakymą reikia patikrinti. Bet tai jau atlikta, spėjant atsakymą 3000.
Vadinasi, teisingas atsakymas D.

S13. Ⓑ 15

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, pradedame nuo vidurio. Suskaičiuokime, kiek įstrižainių turi 17-kampis.
Viršūnes sunumeruokime skaičiais nuo 1 iki 17 ir surašykime visas įstrižaines, žymėdami jas dviem viršūnių numeriais, rašydami iš pradžių įstrižaines, einančias iš pirmos viršūnės, po to įstrižaines, einančias iš antros viršūnės, po to iš trečios, ir t.t., nebeimdami jau užrašytų įstrižainių:

1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	...	1,15	1,16	
	2,4	2,5	2,6	2,7	...	2,15	2,16	2,17
		3,5	3,6	3,7	...	3,15	3,16	3,17
			4,6	4,7	...	4,15	4,16	4,17
				5,7	...	5,15	5,16	5,17
					...	...	...	...
						13,15	13,16	13,17
							14,16	14,17
								15,17

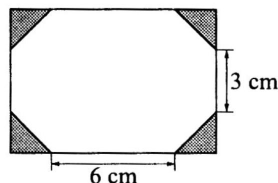
Paskutinėje eilutėje užrašyta 1 įstrižainė, priešpaskutinėje – 2, ..., trečioje – 13 įstrižainių, antroje – 14 įstrižainių, pirmoje – taip pat 14 įstrižainių. Iš viso turime $(1+2+\cdots+14)+14 = 14 \cdot 15/2+14 = 7 \cdot 15 + 7 \cdot 2 = 7 \cdot 17 = 119$ įstrižainių, o tai yra daugiau už $6 \cdot 17 = 102$ įstrižaines.
Bandykime atsakymą 15. Kad būtų įdomiau, suskaičiuokime įstrižainių skaičių kitu būdu. Iš kiekvienos viršūnės išeina $15 - 3 = 12$ įstrižainių (reikia atmesti pačią viršūnę ir dvi gretimas). Kadangi viršūnių yra 15, tai iš viso gautume $15 \cdot 12$ įstrižainių. Bet taip skaičiuodami kiekvieną įstrižainę įskaitome du kartus – iš vieno galo ir iš kito. Vadinasi, iš tikrųjų jų yra 2 kartus mažiau, t. y. $15 \cdot 6 = 90$. Matome, kad tai kaip tik 6 kartus daugiau negu viršūnių skaičius.
Renkamės atsakymą B.

! Žinoma, paprasčiausia sudaryti lygtį. Jeigu viršūnių skaičius n, tai iš kiekvienos viršūnės išeina $n-3$ įstrižainės, ir iš viso gautume $n(n-3)$ įstrižainių. Bet į šį skaičių kiekviena įstrižainė įskaityta 2 kartus, todėl iš tikrųjų įstrižainių yra $n(n-3)/2$. Pagal sąlygą

$$n(n-3)/2 = 6n, \quad n - 3 = 12, \quad n = 15.$$

Vadinasi, vienintelis teisingas atsakymas yra B.

S14. Ⓒ 8



? Sprendžiant pagal brėžinį, trikampio statinis kiek mažesnis kaip 3 cm. Spėjame, kad jis lygus 2 cm, tada keturių trikampių plotas lygus dvigubam kvadrato 2 cm × 2 cm plotui, t. y. 8 cm^2.
Renkamės atsakymą C.

?? Kadangi atsakymai surikiuoti, tikrinkime nuo vidurio. Sakykime, kad nukirpta 8 cm^2, tada vieno trikampio plotas 2 cm^2. Tai pusė kvadrato 2 cm × 2 cm ploto, taigi trikampio statinis lygus 2 cm. Tada stačiakampio plotas $(6+4)(3+4) = 70\,(\text{cm}^2)$, o servetėlės plotas $70-8 = 62\,(\text{cm}^2)$ ir sąlyga išpildyta.
Renkamės atsakymą C.

! Pažymėkime nukirpto trikampio statinio ilgį x. Tada du trikampiai sudaro kvadratėlį su kraštine x, taigi visų keturių trikampių plotas yra $2x^2$. Viso gabalo plotas buvo $(6+2x)(3+2x)$, o nukirpus tapo 62 cm^2. Pagal sąlygą

$$(6+2x)(3+2x) - 2x^2 = 62,$$
$$18 + 9 \cdot 2x + 2x^2 = 62,$$
$$x^2 + 9x - 22 = 0.$$

Šios lygties sprendiniai -11 ir 2, todėl $x = 2$. Vadinasi, nukirpta $2x^2 = 8$ (cm^2).
Teisingas atsakymas C.

S15. Ⓒ 499

? Atsakymai išrikiuoti, ir galima spėti nuo vidurio. Tikriname atsakymą 499, t. y. tikriname lygybę

$$2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^{499},$$
$$2^{1994} + 2^{2\cdot 997} + 2^{3\cdot 665} = 2^{4\cdot 499},$$
$$2^{1994} + 2^{1994} + 2^{1995} = 2^{1996}.$$

Dalijame lygybę iš 2^{1994}:

$$1 + 1 + 2 = 2^2.$$

Ši lygybė teisinga, tai, matyt, teisinga ir pradinė lygybė.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi

$$2^{1994}+4^{997}+8^{665} = 2^{1994}+2^{2\cdot 997}+2^{3\cdot 665} = 2\cdot 2^{1994}+2^{1995} = 2^{1995}+2^{1995} = 2\cdot 2^{1995} = 2^{1996},$$

tai $2^{1996} = 2^{4x}$, $4x = 1996$, $x = 499$.
Teisingas atsakymas C.

Beje, iš sprendimo matome, kad spėti visiškai neverta.

S16. Ⓑ 5^6

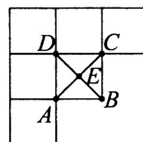
? Surašykime atsakymus taip: 5^3, 25^3, 10^3, $10^3 \cdot \frac{10}{3}$, $10^3 \cdot \frac{10^3}{6}$. Vargu ar gali atsakyme atsirasti vardiklyje trejetų, todėl spėsime iš pirmų trijų atsakymų. Pradėkime nuo vidurinio iš jų pagal didumą – tai 10^3. Jei bakterijų liko 100, tai po 40 h jų buvo $2 \cdot 10^3$, po 32 h – $2^2 \cdot 10^3$, po 24 h – $2^3 \cdot 10^3$, po 16 h – $2^4 \cdot 10^3$, po 8 h – $2^5 \cdot 10^3$. Baigiantis 8-tai valandai, dar prieš antrą dozę, jų

buvo $2^6 \cdot 10^3$. Kadangi tai mažiau už 10^6, tikriname didesnį atsakymą 5^6. Tada atitinkamai gausime bakterijų kiekius 5^6, $2 \cdot 5^6$, $2^2 \cdot 5^6$, $2^3 \cdot 5^6$, $2^4 \cdot 5^6$, $2^5 \cdot 5^6$, $2^6 \cdot 5^6$. Matome, kad tai ir yra 10^6. Renkamės atsakymą B.

! Pirma dozė sustabdė bakterijų dauginimąsi, vadinasi, kaip galima suprasti iš sąlygos,
po 8 h bakterijų buvo $10^6 : 2$,
po 16 h $10^6 : 2^2$,
po 24 h $10^6 : 2^3$,
po 32 h $10^6 : 2^4$,
po 40 h $10^6 : 2^5$,
po 48 h $10^6 : 2^6$.
Taigi po 48 h bakterijų buvo 5^6. Teisingas atsakymas B.
Matome, kad spėti blogiau negu spręsti: vienur skaičiuojame nuo galo, kitur nuo pradžios, tik spėjant skaičiuoti tenka kelis kartus.

!! Iš sąlygos nelabai aišku, kada pradeda (ar baigia) žūti bakterijos po pirmos dozės. Prisieina laikyti, kad jos žūsta iš karto.
Jeigu laikytume, kad bakterijos žūsta palaipsniui, tai tada po 8 h dar veiktų tik pirma dozė, ir bakterijų būtų 10^6. Atitinkamai po 48 h būtų $10^6 : 2^5 = 10 \cdot 10^5 : 2^5 = 10 \cdot 5^5$. Bet tokio atsakymo nėra, ir tai argumentas pirmykščio sąlygos traktavimo naudai.
Beje, bakterijų skaičių galima rasti ir pagal geometrinės progresijos bendrojo nario formulę, bet tai joks palengvinimas.

S17. Ⓓ *D*



? Tikriname atsakymus. Netinka taškas A, nes atlikus simetriją prisidės jau bent trys viršutiniai langeliai (panašiai bus su tašku C). Netinka taškas B, nes prisidės visi nauji langeliai, simetriški seniesiems. Netinka taškas E, nes prisidės 3 nauji langeliai, simetriški kampiniam ir gretimiems.
Renkamės atsakymą D.

! Liko įsitikinti, kad atlikus simetriją su centru taške D, prisidės 2 cm^2. Iš tikrųjų, langelis su raide E pereis į langelį su raide D ir atvirkščiai. Vienas langelis be raidės pereis į kitą langelį be raidės, ir atvirkščiai. O štai langelis su raide A pereis į naują langelį virš langelio tarp raidžių C ir D, o langelis C – į langelį kairiau langelio tarp raidžių D ir A.
Vadinasi, prisidės lygiai 2 langeliai, t. y. $2\,cm^2$.
Teisingas atsakymas D.

S18. Ⓐ 1

? Čia spėti visai sunku. Žinoma, nesunku sugalvoti 3 dėmenis; jų vidurkis 149, todėl $147+149+151 = 447$. Čia gali ateiti į galvą, kad jei vidurkis 3, o dėmenų – 149, tai irgi viskas bus gerai. Tada jau nebesunku suvokti, kad tiks ir vidurkis 1, o dėmenų skaičius – 447. Sukeisti juos vietomis nebepavyksta – dėmuo negali būti vienas, juo labiau, kad kalbama apie paeiliui einančius dėmenis.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi nelyginių dėmenų suma 447 nelyginė, tai dėmenų skaičius nelyginis. Dėmenų skaičių pažymėkime $2k + 1$, vidurinį iš nelyginių dėmenų – x, tada kiti dėmenys bus $x \pm 2$, $x \pm 4$, ..., $x \pm 2k$. Pagal sąlygą jų suma lygi

$$x + (x + 2 + x - 2) + (x + 4 + x - 4) + \ldots + (x + 2k + x - 2k) = 447,$$
$$(2k + 1)x = 3 \cdot 149.$$

Matome, kad dėmenų skaičius $2k+1$ yra dešinės pusės daliklis, o kadangi 149 yra pirminis skaičius, tai $2k + 1$ gali būti 1, 3, 149, 447.

Jeigu būtų galima imti vieną dėmenį (t. y. laikyti, kad vienas dėmuo ir yra paeiliui einančių dėmenų suma) tada būtų $k = 0$, $x = 447$.
Jeigu dėmenys trys, t. y. $2k + 1 = 3$, tai $x = 149$, ir gauname $147 + 149 + 151 = 447$.
Jeigu dėmenų 149, tai gauname $x = 3$, o dėmenys yra $3 - 2 \cdot 74$, $3 - 2 \cdot 73$, ..., $3 - 2 \cdot 1$, 3, $3 + 2 \cdot 1$, ..., $3 + 2 \cdot 74$.
Pagaliau, jeigu dėmenų 447, tai $x = 1$, ir dėmenys $1 - 2 \cdot 223$, $1 - 2 \cdot 222$, ..., $1 - 2 \cdot 1$, 1, $1 + 2 \cdot 1$, ..., $1 + 2 \cdot 223$. Gauname 3 būdus.
Teisingas atsakymas B.

!! Šiaip jau vidurinėje mokykloje nebijoma sumų iš vieno nario. Pavyzdžiui, jeigu kalbama apie reiškinį $1 + 2 + 3 + \cdots + x$, tai laikoma, kad x gali būti ir 4, ir 3, ir 2, ir net 1.

S19. Ⓓ Sekmadienio 7 val. ryto

? Kadangi atsakymai surikiuoti, tai pradėkime nuo vidurio. Taigi sakykime, kad kai valstybėje A yra šeštadienio 4 val. po vidurdienio, tai valstybėje B yra sekmadienio 6 val. ryto. Tai reiškia, kad laikų skirtumas yra +18 valstybėje B. Tada skrydis iš A į B truko antradienį nuo 0 iki 14 val. (laikas valstybės B), o skrydis iš B į A – nuo 1 iki 21 val. po ketvirtadienio vidurdienio – 20 val. Bet skrydis turi trukti tiek pat, – prieštara.
Tikrinkime atsakymą D. Taigi sakykime, kad kai valstybėje A yra šeštadienio 4 val. po vidurdienio, tai valstybėje B yra sekmadienio 7 val. ryto. Tai reiškia, kad laikų skirtumas yra $24 + 7 - 16 = +15$ valstybėje B. Tada skrydis iš A į B (B laiku) truko nuo pirmadienio 21 val. iki antradienio 14 val., t. y. 17 valandų. Skrydis iš B į A (B laiku) truko nuo ketvirtadienio 13 val. iki penktadienio 6 val. ryto, t. y. taip pat 17 valandų.
Renkamės atsakymą D.

! Sakykime, kad kai valstybėje A yra t valandų, tai valstybėje B yra $t + x$. Todėl reisas iš A į B valstybės A atžvilgiu vyksta taip:

išvykimas po 6 val. nuo pirmadienio 0 val. ryto;
atvykimas po $(14 + 24 - x)$ val. nuo pirmadienio 0 val. ryto.

Vadinasi, skrydis trunka $38 - x - 6$ (h).
Reisas iš B į A valstybės B atžvilgiu vyksta taip:

išvykimas po 1 val. nuo ketvirtadienio pietų;
atvykimas po $(3 + x)$ val. nuo ketvirtadienio pietų.

Vadinasi, skrydis trunka $3 + x - 1$ (h).
Kadangi skrydžiai trunka vienodai, tai $32 - x = 2 + x$, $2x = 30$, $x = 15$. Vadinasi, kai valstybėje A yra t valandų, tai valstybėje B yra $t + 15$ valandų. Todėl kai valstybėje A yra šeštadienio 4 val. po vidurdienio, tai valstybėje B yra sekmadienio 7 val. ryto. (Kitaip sakant, valstybė B yra 15 valandų ryčiau.)
Teisingas atsakymas D.

!! Labai patogu skrydį iš A į B perstumti atgal 6 valandomis (laikas valstybės A):

jei išvykimas būtų 0 val.,
tai atvykimas būtų $(8 + 24 - x)$ val.

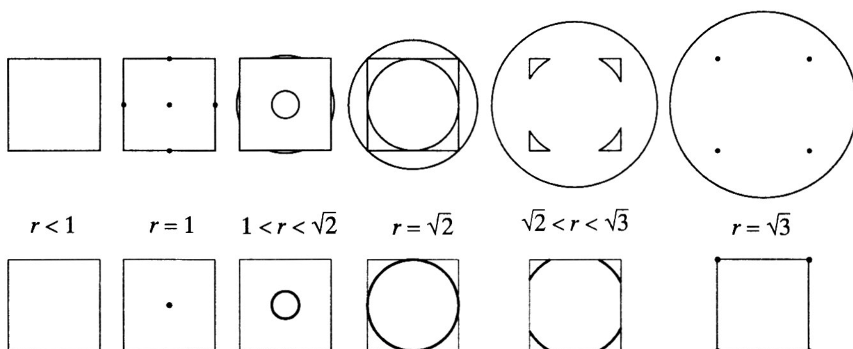
Perstumkime skrydį iš B į A 13 val. atgal:

jei išvykimas iš B būtų 0 val. (valstybės B laiku), tai atvykimas į A būtų $(2+x)$ val.

Vadinasi, $32 - x = 2 + x$, $2x = 30$, $x = 15$.

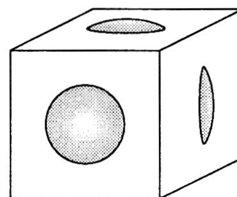
S20. Ⓐ $1 < r \leqslant \sqrt{2}$

? Iš simetrijos aišku, kad rutulio paviršius kiekvienoje kubo sienoje turi iškirsti apskritimą. Kai spindulys bus 1 cm, tai rutulys lies sieną tik viename taške. Kai spindulys r bus tarp 1 ir $\sqrt{2}$, tai paviršius iškirs apskritimą. Kai spindulys bus lygus $\sqrt{2}$, taip pat bus iškirstas apskritimas. Pirmoje paveikslėlių eilutėje pateiktas vaizdas iš viršaus.



Renkamės atsakymą A.

! Kai $r < 1$, sfera telpa kubo viduje ir bendrų taškų su kubo paviršiumi neturi. Kai $r > \sqrt{3}$, kubas telpa sferos viduje, ir jie bendrų taškų neturi. Atvejus $r = 1$ ir $r = \sqrt{2}$ jau aptarėme. Kai $r = \sqrt{3}$, tai kubo paviršiaus ir sferos bendri taškai bus tik kubo viršūnės. Kai $\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$, 6 apskritimų nebus. Kai $1 < r < \sqrt{2}$, gauname 6 apskritimus. Antroje paveikslėlių eilutėje pavaizduota, kaip sfera kerta priekinę sieną. Paveikslėlyje dešinėje matome, kaip kirsdamiesi atrodo kubas ir sfera, kai $1 < r < \sqrt{2}$. Teisingas atsakymas A.



$1<r<\sqrt{2}$

!! Dar kartą grįžkime prie sąlygos ir įsiskaitykime į žodžius „tada ir tik tada“. Jie reiškia, kad reikia įrodyti du teiginius:
1) Jeigu r tenkina nelygybę $1 < r \leqslant \sqrt{2}$, tai K ir S sankirta yra 6 apskritimai.
2) Jeigu K ir S sankirta yra 6 apskritimai, tai r tenkina nelygybę $1 < r \leqslant \sqrt{2}$.
Pabandykime viską daryti formaliai, neskubėdami, ir pažiūrėkime, ar viskas mūsų buvo įrodyta.
1) Duota, kad $1 < r \leqslant \sqrt{2}$. Nustatykime, kurie kubo pagrindo taškai priklauso sferai. Imkime pagrindo tašką, priklausantį sferai. Spindulio, jungiančio tą tašką su sferos centru, projekciją pažymėkime r'. Kadangi $r^2 = r'^2 + 1$, tai $r' \leqslant 1$, ir taškai, nutolę nuo kubo centro O projekcijos į pagrindą O' atstumu r', yra apskritime su spinduliu r' ir centru O'.
Vadinasi, kubo pagrindo sienoje turime apskritimą, taigi visose 6 sienose turime 6 apskritimus.
2) Atvirkščiai, sakykime, kad K ir S sankirta yra 6 apskritimai. Reikia įrodyti nelygybę $1 < r \leqslant \sqrt{2}$. Tarkime priešingai, kad nelygybė neteisinga – t. y. kad $r \leqslant 1$ arba $r > \sqrt{2}$. Jeigu $r < 1$, tai sferos spindulys mažesnis už atstumą nuo O iki sienos, ir sfera su kubu neturi bendrų taškų, – prieštara. Jeigu $r = 1$, tai tik sienų centrai O' yra bendri sferos ir kubo taškai – viso labo 6 taškai, – prieštara. Pagaliau, jeigu $\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$, tai jau matėme, kad kiekvienoje sienoje turime 4 apskritimo lankus, o ne visą apskritimą. Jeigu $r = \sqrt{3}$, tai turime 8 bendrus taškus – kubo viršūnes, o pats kubas yra sferos viduje. Pagaliau, jeigu $r > \sqrt{3}$, tai bendrų taškų K ir S neturi, – prieštara.

Tokį įrodymo būdą paaiškinsime paprastesniu pavyzdžiu. Nagrinėkime teiginį:
Jeigu $c^2 < a^2 + b^2$ *(c – didžiausioji trikampio kraštinė), tai trikampis smailusis,*
jeigu $c^2 = a^2 + b^2$, *tai trikampis statusis,*
jeigu $c^2 > a^2 + b^2$, *tai trikampis bukasis,*
ir atvirkščiai.

Sakykime, kad mes jau įrodėme tiesioginį teiginį (jeigu $c^2 < a^2 + b^2$, tai trikampis smailusis; jeigu $c^2 = a^2 + b^2$, tai trikampis statusis; jeigu $c^2 > a^2 + b^2$ tai trikampis bukasis).
Tada atvirkštiniam teiginiui (jeigu trikampis smailusis, tai $c^2 < a^2 + b^2$; jeigu trikampis statusis, tai $c^2 = a^2 + b^2$; jeigu trikampis bukasis, tai $c^2 > a^2 + b^2$) jokio naujo įrodymo nebereikia.
Iš tikrųjų, įrodykime, pavyzdžiui, teiginį:
jeigu trikampis smailusis, tai $c^2 < a^2 + b^2$.
Tarkime priešingai, kad nelygybė $c^2 < a^2 + b^2$ neteisinga. Tada jeigu $c^2 = a^2 + b^2$, tai pagal tiesioginį teiginį trikampis statusis, – prieštara. O jeigu $c^2 > a^2 + b^2$, tai pagal tiesioginį teiginį trikampis bukasis, – prieštara.
Teiginys (jeigu trikampis smailusis, tai $c^2 < a^2 + b^2$) įrodytas.

S21. Ⓓ 2161

? Kadangi atsakymai išrikiuoti, tai pradėkime nuo vidurio. Jeigu marsiečių būtų 2160, tai jų neužtektų: pavyzdžiui, jeigu kiekvienos rūšies jų būtų po 10, o rūšių yra $3 \cdot 4 \cdot 18 = 216$, tai nei vienos rūšies nebūtų vienuolikės. O štai pridėjus dar vieną marsietį, panašu, kad užtekti turėtų.
Renkamės atsakymą D.

! Pagal spalvą yra 3 marsiečių rūšys, pagal rankų skaičių – 4 rūšys, pagal antenų skaičių – 18 rūšių. Remiantis kombinatorikos daugybos taisykle yra $3 \cdot 4 \cdot 18$ marsiečių rūšių. Jeigu kiekvienos rūšies marsiečių būtų lygiai 10, tai jų iš viso būtų $3 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 10$, bet 11 vienos rūšies dar neatsirastų. O štai jeigu marsiečių būtų $3 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 10 + 1$, tada 11 vienos rūšies marsiečių tikrai atsiras. (Tarkime priešingai, kad 11 vienos rūšies marsiečių neatsiras, tada jų yra $\leqslant 10$ pirmos rūšies, $\leqslant 10$ antros rūšies, ..., $\leqslant 10$ marsiečių $3 \cdot 4 \cdot 18$-tos rūšies. Iš viso jų būtų $\leqslant 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 18$, – prieštara.)
Vadinasi, kad iš marsiečių tikrai būtų galima sudaryti futbolo komandą, jų turi būti mažiausiai $3 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 10 + 1 = 12 \cdot 18 \cdot 10 + 1 = (15^2 - 3^2) \cdot 10 + 1 = (225 - 9) \cdot 10 + 1 = 2161$.
Teisingas atsakymas D.

S22. Ⓑ $\{4, 5, 6\}$

? Atsakymai išrikiuoti, todėl verta tikrinti nuo vidurio. Aišku, kad kairė pusė didėja, kai n didėja. Imkime $n = 7$. Tada kairė pusė lygi

$$[(2^{2^7} + 1)(2^{2^7} - 1) + 1]^{1/4} = [(2^{2^7})^2 - 1 + 1]^{1/4} = (2^{2^7})^{1/2} = 2^{2^6} = 2^{64},$$

ir gauname per daug (nes $256 = 2^8$). Vadinasi, atsakymai C, D ir E atkrinta.
Imkime $n = 3$. Tada kairė pusė lygi $(2^{2^3})6^{1/2} = 2^{2^2} = 2^4 = 16$, – per mažai. Vadinasi, atkrinta ir atsakymas A. Renkamės atsakymą B.

! Išspręskime duotąją lygtį:

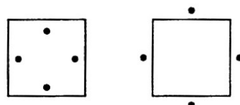
$$[(2^{2^n})^2 - 1 + 1]^{1/4} = 256, \quad (2^{2^n})^2 = 256^4, \quad 2^{2^n} = 16^4, \quad 2^{2^n} = 2^{16}, \quad 2^n = 16, \quad n = 4.$$

Teisingas atsakymas B.

Vėl matome, kad spręsti papraščiau, negu spėti.

S23. Ⓓ 8

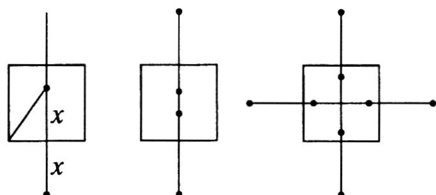
? Nesunku nurodyti 4 taškus kvadrato viduje ir 4 taškus kvadrato išorėje. Panašu, kad daugiau taškų nėra. Renkamės atsakymą D.



! Iš pradžių imkime dvi viršutines kvadrato viršūnes. Taškai, vienodai nutolę nuo jų, yra vidurio statmenyje.
Jeigu taškas per 1 nutolęs nuo kairiosios apatinės kvadrato viršūnės, tai

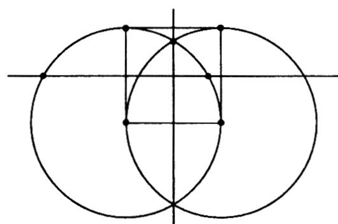
$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ (\approx 0{,}86).$$

Gauname du tokius taškus. Tuos pačius taškus gauname, jeigu taškas nutolęs per 1 nuo dešiniosios apatinės viršūnės. Vadinasi, viršutinių viršūnių pora duoda 2 taškus.
Jeigu imsime apatinę viršūnių porą, tai gausime dar 2 taškus:
Analogiškai imdami kitas dvi taškų poras gausime dar 4 taškus.



Taigi teisingas atsakymas D.

!! Galima pasiimti kurią nors viršūnę (pavyzdžiui, kairiąją apatinę), nubrėžti spindulio 1 apskritimą su centru tame taške ir nustatyti, kurie apskritimo taškai vienodai nutolę nuo dviejų kitų viršūnių, t. y. nustatyti, kuriuose taškuose apskritimas kerta vidurio statmenis.
Gauname 4 taškus. Apėję visas 4 viršūnes, gauname 8 taškus (kiekvienas taškas priklauso dviem apskritimams).



Nesunku visa tai užrašyti lygtimis. Sakykime, kad vienetinio kvadrato viršūnės yra taškuose $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$. Keturių apskritimų lygtys yra $(x \pm \frac{1}{2})^2 + (y \pm \frac{1}{2})^2 = 1$. Jų susikirtimo taškus su y ašimi ($x = 0$) rasti nesunku, tai $(0, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, o susikirtimo taškai su x ašimi ($y = 0$) yra $(\pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

S24. Ⓓ 30

? Spėti sunku. Užtenka surinkti vieną komandą. kurioje žaidžia Matas ir Karolis. Jei papildomos sąlygos nebūtų, tai būtų galima padaryti $C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 8 \cdot 7 = 56$ būdais. Galima tikėtis, kad su papildoma sąlyga būdų būtų maždaug dvigubai mažiau, t. y. 28.
Renkamės atsakymą D.

! Tą komandą, kurioje žais Matas ir Karolis, pavadinkime pirmąja. Joje dar žais arba Viktoras, arba Andrius.
Sakykime, kad joje dar žais Viktoras, tada Andrius žais antroje komandoje. Pirmoje komandoje dar liko 2 vietos, ir jas užpildyti galima paėmus iš 6 neminėtų berniukų 2 (tai padarius, likusieji 4 berniukai automatiškai atsidurs antroje komandoje). Pasirinkti 2 berniukus iš 6 galima 15 būdų: jeigu berniukus sunumeruotume nuo 1 iki 6, tai būdai būtų tokie:

12	13	14	15	16
	23	24	25	26
		34	35	36
			45	46
				56

Vadinasi, surinkti pirmą komandą, kai joje žaidžia Viktoras, galima 15 būdų. Dar tiek pat būdų bus, kai pirmoje komandoje žais Andrius. Todėl iš viso yra 30 būdų, teisingas atsakymas D.

!! Trumpai skaičiavimą galima užrašyti taip: yra $2 \cdot C_6^2 = 30$ būdų.

S25. Ⓓ 4

? Reikiami natūralieji skaičiai yra $91 = 7 \cdot 13$ kartotiniai. Nagrinėkime $1 \cdot 91$, $2 \cdot 91$, $3 \cdot 91$, $4 \cdot 91$, $5 \cdot 91$, $6 \cdot 91$, $7 \cdot 91$, $8 \cdot 91$, $9 \cdot 91$, $10 \cdot 91$, $11 \cdot 91$, $12 \cdot 91$, $13 \cdot 91$, ... Nesunku įsitikinti, kad 2-as, 3-as, 5-tas ir 7-tas skaičiai tinka, o kiti parašyti – netinka. Spėjame, kad daugiau tinkamų skaičių nebus.
Renkamės atsakymą D.

! Jeigu natūraliojo skaičiaus daliklis yra 91, tai tas skaičius yra pavidalo $k \cdot 91 = k \cdot 7 \cdot 13$. Aišku, kad k turi būti pirminis: jei k nėra pirminis, tai $k = d_1 d_2$, kur tiek $d_1 > 1$, tiek $d_2 > 1$. Bet tada dalikliai $d_1 \cdot 91$ ir $d_1 \cdot d_2 \cdot 91$ būtų nelygūs ir abu būtų didesni už 91, o tada 91 nebūtų antras pagal didumą daliklis.
Be to, $k \leqslant 7$. Iš tikrųjų, jei $k \geqslant 11$, tai dalikliai $k \cdot 13$ ir $k \cdot 7 \cdot 13$ nelygūs ir abu būtų didesni už $7 \cdot 13$.
O štai pirminiai 2, 3, 5, 7 tinka. Iš tikrųjų, jei k lygus 2, 3 arba 5, tai skaičius $k \cdot 7 \cdot 13$ turi 8 daliklius 1, k, 7, 13, $7k$, $13k$, $7 \cdot 13$, $k \cdot 7 \cdot 13$ ir 91 yra antras pagal didumą. O jeigu $k = 7$, tai skaičius $7 \cdot 7 \cdot 13$ turi 6 daliklius

$$1,\ 7,\ 13,\ 7 \cdot 7,\ 7 \cdot 13,\ 7 \cdot 7 \cdot 13,$$

ir vėl $7 \cdot 13$ yra antras pagal didumą.
Vadinasi, yra 4 skaičiai, kurių antras pagal didumą daliklis yra 91:

$$2 \cdot 7 \cdot 13 = 182, \quad 3 \cdot 7 \cdot 13 = 273, \quad 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455, \quad 7 \cdot 7 \cdot 13 = 637.$$

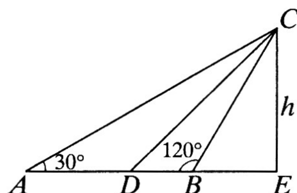
Teisingas atsakymas D.

S26. Ⓒ $\sqrt{\frac{2}{3}}$

? Apytiksliai atsakymai yra 0,7; 0,6; 0,8; 0,9; 0,5. Iš akies matyti, kad reikia rinktis iš atsakymų C ir D. Panašesnis atsakymas C.
Renkamės atsakymą C.

! Kadangi $\angle ACB = 180° - 120° - 30°$, tai $\angle DCB = 15°$, o $\angle CDB = 180° - 120° - 15° = 45°$. Remiantis sinusų teorema, $BC : CD = \sin 45° : \sin 120° = \sin 45° : \sin 60° = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
Teisingas atsakymas C.

!! Nubrėžiame statmenį $CE = h$ į AB. Iš stačiųjų trikampių $CD^2 = CE^2 + DE^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$, $BC^2 = BE^2 + EC^2$, $BC^2 = BC^2/4 + h^2$, $4BC^2 = BC^2 + 4h^2$, $3BC^2 = 4h^2$, $BC^2 = 4h^2/3$. Todėl $BC^2/CD^2 = (4h^2/3) : (2h^2) = 2/3$.



S27. Ⓔ 1007

? Atsakymai reiškia, kad Jonukas gavo vieną iš rezultatų: 11448, 9540, 8639, 5724, 4823.
Atsakymas A netinka, nes dviejų dviženklių skaičių sandauga mažesnė už $10^2 \cdot 10^2 = 10^4 < 11448$.
Skaičių 9540 išskaidyti lengva: $9540 = 2 \cdot 5 \cdot 954 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 106 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 53$. Kadangi 53 pirminis, o jo kartotiniai ne dviženkliai, tai ir šios sandaugos negali būti dviejų dviženklių sandauga: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$, – netinka ir atsakymas B.

Sunku išskaidyti skaičių 4823 ar 8639. Bet jų skirtumas 3816 taip pat dalijasi iš ieškomo dviženklio, o $3816 = 9 \cdot 424 = 9 \cdot 4 \cdot 106 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 53$. Šį skaičių išskaidyti dviženklio ir ne daugiau kaip dviženklio sandauga galima: $72 \cdot 53$. Tenka grįžti prie 8639, ir kyla įtarimas, kad jis gali turėti daugiklį 53 (juk visi 3 skaičiai turi tą patį dviženklį daugiklį). Iš tikrųjų, $8639 : 53 = 163$, ir skaičiaus 8639 išskaidyti į dviženklių sandaugą nepavyksta. Atsakymas C netinka.
Skaičių 5724 išskaidyti lengva: $5724 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 53$, bet jo išskaidyti 5 dviženklių sandauga nepavyksta. Atsakymas D netinka.
Skaičių 4823 išskaidyti vėl sunkoka, bet ir vėl mus gelbsti 53, nes $4823 : 53 = 91$. Kadangi „apsukus" 91 gauname 19, o $19 \cdot 53 = 1007$, tai atsakymas E tinka – Jonukas daugino $19 \cdot 53$ ir turėjo gauti 1007, bet apsirikęs jis sudaugino 91 ir 53, ir gavo 4823 – rezultatą, 3816 didesnį negu turėjo gauti.
Renkamės atsakymą E.

?? Kadangi visi trys skaičiai – klaidingas rezultatas, teisingas rezultatas ir jų skirtumas turi bendrą dviženklį daugiklį, tai išskaidyti juos padeda Euklido algoritmas. Raskime DBD(8639, 4823). Jis lygus DBD(8639 − 4823, 4823) = DBD(3816, 4823) = DBD(1007, 3816) = DBD(1007, 795) = DBD(212, 795) + DBD(212, 159) = DBD(53, 159) = 53.
Taigi visi nagrinėjami skaičiai dalijasi iš 53. Toliau sprendžiame kaip anksčiau.

! Sakykime, kad skaičiai buvo $x = \overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, o sukeisti buvo antro skaičiaus skaitmenys. Tada

$$(\overline{dc} - \overline{cd})x = 3816,$$

$$(10d + c - 10c - d)x = 9 \cdot 424,$$

$$(d - c)x = 424 = 2^3 \cdot 53.$$

Kadangi 53 pirminis, o $d - c \leqslant 9$, tai x dalijasi iš 53. Bet x dviženklis, todėl $x = 53$, $d - c = 8$. Vadinasi, yra tik 2 galimybės: $d = 9$, $c = 1$ arba $d = 8$, $c = 0$. Bet pagal sąlygą $\overline{cd}$ dviženklis, $c \neq 0$, todėl tinka tik pradiniai skaičiai 53 ir 19.
Vadinasi, teisingas rezultatas turėjo būti $53 \cdot 19 = 1007$. Teisingas atsakymas E.

Ir šiame uždavinyje, ko gero, lengviau spręsti, o ne spėlioti.

S28. (D) 184 320

? Pirmųjų devynių sandaugų suma lygi $1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Jeigu sudėsime bet kurių 9 iš eilės einančių skaičių

$$\dots 1 \quad \dots 2 \quad \dots 3 \quad \dots \quad \dots 9$$

skaitmenų sandaugas, tai visur gausime neparašytų pirmųjų skaitmenų sandaugą, padaugintą atitinkamai iš 1, 2, ..., 9. Jas sudėję, gausime minėtą sandaugą, padaugintą iš 45. Kadangi į skaičius, kurie turi skaitmenį 0, galime nekreipti dėmesio, tai ir visą ieškomąją sumą S_{2000} galime suskaidyti į minėto pavidalo devynetukus. Todėl S_{2000} dalijasi iš 45. Skaičiai A, B, C nesidalija iš 9, todėl jie tikrai netinka.
Skaičius E lyg tai „per apvalus".
Renkamės atsakymą D.

! Vėl nekreipiame dėmesio į skaičius su nuliais. Pasižiūrėkime, kaip kinta devynetukų sumos:

nuo 1 iki 9 sandaugų suma – 45;
nuo 11 iki 19 tiek pat – 45;
nuo 21 iki 29 dukart tiek – $2 \cdot 45$;
nuo 31 iki 39 3-kart tiek – $3 \cdot 45$;
....
nuo 91 iki 99 9-kart tiek – $45 \cdot 45$.

Vadinasi, nuo 11 iki 99 suma lygi $45 \cdot 45$.

Nuo 111 iki 199 suma ta pati – 45^2;
nuo 211 iki 299 suma dviguba – $2 \cdot 45^2$;
....
nuo 911 iki 999 suma 9-guba – $9 \cdot 45^2$.
Vadinasi, nuo 111 iki 999 suma lygi $45 \cdot 45^2$.
Nuo 1111 iki 1999 suma bus tokia pat.
Iš viso gauname:

$$45+45^2+2{\cdot}45^3 = 45{\cdot}46+2{\cdot}45^3 = 90(23+2025) = 90{\cdot}2048 = 204800-20480 = 184320.$$

Teisingas atsakymas D.

S29. Ⓑ 3

? Imkime 2 svarstelius ir suvokime, kiek daugiausiai masių galima pasverti. Jeigu imsime svarstelį 1, tai kitą neverta imti 2 (atsvertume tik 3 mases), o 3 imti gerai: sveriame mases 1, $2 = 3 - 1$, 3, $3 + 1$. Tada jau beveik aišku, kad trečią svarstelį verta imti $3 \cdot 3 = 9$. Ir iš tikrųjų, nesunku įsitikinti, kad pasveriame visas mases. Panašu, kad 2 svarstelių neužtenka, taigi atsakymas matyt bus 3.
Renkamės atsakymą B.

! Sakykime, kad turime 2 svarstelius, kurių masės lygios m ir n. Tada mes galime atsverti mases m, n, $m + n$ ir $m - n$. Net jei visi šie skaičiai skirtingi, tai galima pasverti tik 4 skirtingas mases. Vadinasi, pasverti 10 masių reikia bent 3 svarstelių. O štai 3 svarstelių gana: imkime svarstelius 1, 3 ir 9. Tada

$$2 = 3 - 1, \quad 4 = 3 + 1, \quad 5 = 9 - 3 - 1,$$
$$6 = 9 - 3, \quad 7 = 9 - 3 + 1, \quad 8 = 9 - 1, \quad 10 = 9 + 1,$$

ir visas mases nuo 1 iki 10 pasverti galima (žinoma, galima dar pasverti mases $11 = 9 + 3 - 1$, $12 = 9 + 3$ ir $13 = 9 + 3 + 1$, bet jų mums nebereikia).
Vadinasi, teisingas atsakymas B.

S30. Ⓓ 7

? Nusipiešus piramidę, lengva suprasti, kad galima „atskelti“ vieną viršūnę – taip gauname 4 plokštumas. Galima „išskirti“ dvi prasilenkiančias briaunas (jų yra 3 poros – po vieną kiekvienai pagrindo briaunai) – dar 3 plokštumos.
Renkamės atsakymą D.

! Keturi taškai gali pasiskirstyti tik dviem būdais: 1) į vieną pusę nuo plokštumos vienas taškas, į kitą – trys; 2) į kiekvieną pusę po 2 taškus. 1) atveju yra 4 būdai pasirinkti 1 tašką. 2) atveju reikia taškui A pasirinkti „kaimyną“ (tada likusieji du taškai atsidurs kitoje pusėje) – tai galima padaryti 3 būdais. Vadinasi, yra $4 + 3 = 7$ būdai suskirstyti taškus, ir atitinkamai yra 7 plokštumos.
Teisingas atsakymas D.

!! Galima iš karto kalbėti apie tašką A. Jis gali neturėti kaimyno (1 būdas), turėti 1 kaimyną (3 būdai), turėti 2 kaimynus (3 būdai). Iš viso turime 7 būdus.
Nurodysime, kaip išvesti plokštumą, kad taškai A, B, C būtų vienoje pusėje, D – kitoje, o atstumai būtų lygūs. Iš taško D vedame statmenį plokštumai ABC iki susikirtimo su ja. Tą statmenį dalijame pusiau ir vedame per dalijimo tašką plokštumą, statmeną išvestam statmeniui.
Nesunku išvesti ir plokštumą, kurios vienoje pusėje būtų taškai A ir B, o kitoje – C ir D. Jungiame atkarpų AB ir CD vidurio taškus. Gautą atkarpą dalijame pusiau ir per vidurio tašką vedame plokštumą, statmeną jungiančiajai atkarpai.

Kengūra 2000

Atsakymai

Užduotys	M	B	K	J	S
1	B	C	E	A	D
2	C	E	A	D	E
3	D	D	D	E	A
4	A	E	C	B	E
5	B	D	D	D	D
6	C	E	D	A	D
7	A	D	B	A	D
8	E	B	A	A	C
9	B	D	A	C	B
10	D	D	D	B	C
11	B	B	B	C	D
12	D	E	A	D	D
13	B	D	D	D	B
14	C	B	C	D	C
15	C	C	B	E	C
16	C	B	D	D	B
17	B	D	C	C	D
18	B	E	C	D	A
19	B	A	D	C	D
20	C	B	D	B	A
21	C	D	D	C	D
22	B	D	D	C	B
23	B	D	D	B	D
24	C	B	C	B	D
25		D	C	D	D
26		A	A	A	C
27		A	C	B	E
28		D	D	C	D
29		D	B	E	B
30		E	C	C	D